

**UNIVERSIDAD DE CUENCA
FACULTAD DE INGENIERÍA
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL**

**Tensegridad como sistema estructural alternativo
aplicado a puentes peatonales**

Trabajo de titulación
previo a la obtención del
título de Ingeniero Civil.

AUTOR:

**Jaswant Israel Cobos Cobos
1750324129**

DIRECTOR:

**Ing. Juan Eugenio Carrión Monsalve, Ph.D.
0102155405**

**Cuenca - Ecuador
Febrero 2018**

Resumen

La tensegridad es un sistema estructural muy útil para diseñar estructuras livianas. Además, aporta valor arquitectónico a las obras ingenieriles y desde su creación se usó en el diseño de esculturas muy llamativas.

En el presente trabajo se realiza el diseño de un puente peatonal usando un sistema de tensegridad, tomando en cuenta las deflexiones máximas permitidas y las capacidades de los elementos que se encuentran disponibles.

Para encontrar una configuración geométrica inicial, se realizaron modelos físicos y digitales de módulos tensegríticos simples y se fueron uniéndolos para crear modelos más complejos.

Luego, se buscó el modo factible de pre esfuerzo integral para la geometría propuesta, mediante el método de la Doble Descomposición en Valores Singulares. Una vez obtenido este modo, que posee la distribución relativa del pre esfuerzo, se establecieron las fuerzas correspondientes.

Los resultados del análisis estructural, muestran que, la configuración propuesta para el puente, es válida y se puede llegar a un diseño exitoso usando la Tensegridad.

Palabras claves: Tensegridad, puente tensegrítico, búsqueda de pre esfuerzo, doble descomposición en valores singulares, estructura pre esforzada.

Abstract

Tensegrity is a very useful structural system for the design of lighter structures. In addition, it brings architectural value to engineering works and since its creation it was used in the design of very striking sculptures.

In the present work the design of a pedestrian bridge is made using a tensegrity system, taking into account the maximum allowed deflections and the capacities of the elements that are available.

To find an initial geometric configuration, physical and digital models of simple tensegrity modules were made and they were joined to create more complex models.

Then, a feasible integral prestress mode was determined for the proposed geometry, by means of the Double Singular Values Decomposition method. Once obtained this mode, which has the relative distribution of the pre-stress, the corresponding forces were established.

The results of the structural analysis show that the proposed configuration for the bridge is valid and a successful design can be reached using Tensegrity.

Keywords: Tensegrity, tensegrity bridge, pre-stress search, Double Singular Values Decomposition, pre-stressed structure.

Tabla de contenido:

Resumen	2
Abstract	3
1. INTRODUCCIÓN	10
1.1. Antecedentes	10
1.2. Justificación	11
1.3. Objetivos	12
1.3.1. Objetivo General	12
1.3.2. Objetivos Específicos	12
2. MARCO TEÓRICO	13
2.1. Definición del Sistema	13
2.2. Comienzos de la Tensegridad	14
2.3. Conceptos Fundamentales	16
2.3.1. Búsqueda de Forma (<i>Form Finding</i>)	17
2.3.2. Indeterminación estática y cinemática	17
2.3.3. Pre Esfuerzo	18
2.3.4. Auto Esfuerzo	19
2.3.5. Estabilización de Mecanismos Infinitesimales	20
2.3.6. Matriz de Equilibrio	21
2.3.7. Matriz de Compatibilidad	22
2.3.8. Matriz de Rigidez Tangente	24
2.3.9. Rigidez de un Sistema Reticular Pre esforzado	24
2.4. Estado del Arte	29
2.4.1. Métodos de Búsqueda de Forma	30
2.4.2. Métodos de Búsqueda del Pre esfuerzo	35
2.4.3. Tipos de Tensegridad	41
2.4.4. Aplicaciones de la Tensegridad	42
3. METODOLOGÍA	48
3.1. Software	48
3.2. Búsqueda de Forma mediante Modelos Digitales y Físicos sencillos ..	48
3.3. Propuesta de Diseño para el Puente	50
3.3.1. Forma Geométrica del Puente	50
3.3.2. Modelo Digital del Puente	52
3.3.3. Búsqueda del Pre esfuerzo	54



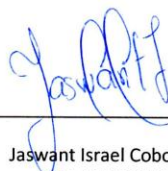
3.4. Modelos Físicos	62
3.3.4. Modelos Físicos de Prismas y Módulos Simples de Tensegridad	62
3.3.5. Modelo Físico del Puente Tensegrítico.....	64
4. DISEÑO	69
4.1. Sistema Estructural	69
4.2. Proceso de Diseño	72
4.3. Cargas.....	72
4.3.1. Carga Muerta DC.....	74
4.3.2. Carga Viva PL.....	76
4.3.3. Carga de Viento WS	77
4.3.4. Combinaciones de Carga	78
4.4. Propiedades de los Materiales	79
4.4.1. Perfiles HSS Circular	79
4.4.2. Cable Estructural	80
4.5. Estados Límite	81
4.5.1. Elementos a Compresión	81
4.5.2. Elementos a Tensión	83
4.6. Resultados y Análisis	84
4.6.1. Diseño de los Elementos	84
4.6.2. Fuerzas de Pre Esfuerzo de los Elementos.....	85
4.6.3. Desplazamiento de Nodos y Cargas Axiales en Estado de Pre Esfuerzo.....	86
4.6.4. Deflexiones debidas a Cargas de servicio en los Nodos	88
4.6.5. Fuerzas Axiales en los elementos debidas a las Combinaciones de Carga. 89	
5. CONCLUSIONES	90
6. BIBLIOGRAFÍA.....	92
7. ANEXOS.....	95
7.1. ANEXO A: Obtención de la Matriz de Equilibrio.....	95
7.2. ANEXO B: Determinación de la carga de viento con (AASHTO LRFD, 2009b).....	99
7.3. ANEXO C: Programa de MATLAB para la determinación de la distribución relativa de Pres Esfuerzo usando la DSVD.....	101

Cláusula de licencia y autorización para publicación en el Repositorio
Institucional

Yo **Jaswant Israel Cobos Cobos** en calidad de autor y titular de los derechos morales y patrimoniales del trabajo de titulación **"Tenseguridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales"**, de conformidad con el Art. 114 del CÓDIGO ORGÁNICO DE LA ECONOMÍA SOCIAL DE LOS CONOCIMIENTOS, CREATIVIDAD E INNOVACIÓN reconozco a favor de la Universidad de Cuenca una licencia gratuita, intransferible y no exclusiva para el uso no comercial de la obra, con fines estrictamente académicos.

Asimismo, autorizo a la Universidad de Cuenca para que realice la publicación de este trabajo de titulación en el repositorio institucional, de conformidad a lo dispuesto en el Art. 144 de la Ley Orgánica de Educación Superior.

Cuenca, 10 de febrero de 2018.

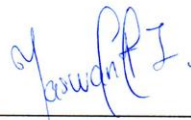


Jaswant Israel Cobos Cobos
C.I: 1750324129

Cláusula de Propiedad Intelectual

Yo **Jaswant Israel Cobos Cobos**, autor del trabajo de titulación **"Tenseguridad como sistema estructural alternativo aplicado a puentes peatonales"**, certifico que todas las ideas, opiniones y contenidos expuestos en la presente investigación son de exclusiva responsabilidad de su autor.

Cuenca, 10 de febrero de 2018.



Jaswant Israel Cobos Cobos
C.I: 1750324129



Dedicatoria:

Quiero dedicar este trabajo a las personas que me acompañaron durante toda la carrera de Ingeniería Civil. Con mención especial a Valeria Esparza, que siempre me apoyó y me dio ánimos para no rendirme y seguir adelante. A mis padres Orlando Cobos y Beatriz Cobos, porque me impulsaron desde pequeño para hacer cosas grandes y realizarme como persona. A mis hermanos Marlon, David y Jim que siempre me brindaron su comprensión y cariño. Nada de esto sería posible sin su apoyo y afecto.

Jaswant Israel Cobos Cobos



Agradecimientos:

Quiero agradecer a todos los profesores que realmente marcaron mi carrera, ya que dieron todo de si en el aula de clases para que los alumnos aprendamos y no nos rindamos. A mis amigos y familiares que formaron parte de este trayecto y brindaron conocimientos y experiencias inolvidables. Agradezco de manera especial al Ingeniero Juan Carrión Ph.D., por permitirme realizar este trabajo de titulación bajo su tutela y siempre estuvo dispuesto a enseñar cosas innovadoras a sus alumnos y esta vez no fue la excepción.

1. INTRODUCCIÓN

La Tensegridad es un sistema que permite a una estructura permanecer en auto equilibrio estable. Los elementos se someten únicamente a cargas axiales, y dependiendo del elemento si es una barra o un cable, estos estarán sujetos a compresión o tracción respectivamente.

La variedad de posibilidades de diseño, ligereza, ahorro de materiales y gran resistencia que posee la tensegridad han facilitado que se realicen trabajos variados y vistosos como los realizados por el escultor Kenneth Snelson (Heartney & Snelson, 2013).

En el presente trabajo se busca el diseño de un puente peatonal como aplicación de las estructuras tensegríticas en la ingeniería civil. Para lo cual se recopila información sobre este tipo de estructuras y se aplican los métodos descritos en la bibliografía para el diseño de modelos digitales y físicos.

1.1. Antecedentes

Los primeros trabajos en tensegridad fueron realizados por el artista letón Karl Loganson y expuestos en la exhibición de Obmokhu Rusia en 1921, en donde se mostró una estructura que constaba de 3 barras que no se chocaban entre sí y se unían mediante cables (Burkhardt, 2004).

Otro referente de la tensegridad es Kenneth Snelson, quien en el año de 1948, estabilizó dos “X” de madera con nylon sin que estas se tocaran entre sí (Snelson, 2012). El descubrimiento de la tensegridad se lo atribuye a este escultor, aunque fue su profesor Richard B. Fuller quien dio el nombre de “*Tensegrity*” al sistema, al ver la escultura antes mencionada (Snelson, 2012).

Este sistema no es utilizado solamente como una expresión artística, grandes referentes en el campo estructural han promovido el uso de la tensegridad. Entre los más importantes se tiene a *Georgia Dome*, que fue inaugurado en 1992, aunque en este caso no se trata de tensegridad pura ya que el domo se ancla a un anillo de hormigón y el puente peatonal tensegrítico más largo del mundo, *Kurilpa Bridge*, que fue inaugurado en 2009 sobre el río Brisbane en Australia. Este puente posee tres luces, eliminando la necesidad de grandes empotramientos y permitiendo una construcción en base a la técnica *cantiléver*. Esta técnica permite construir sin la necesidad de estructuras secundarias de soporte, lo que facilita la construcción de puentes sobre elementos que no pueden ser interferidos. Tiene una longitud de 470 metros y la luz libre más grande es de 120 metros.

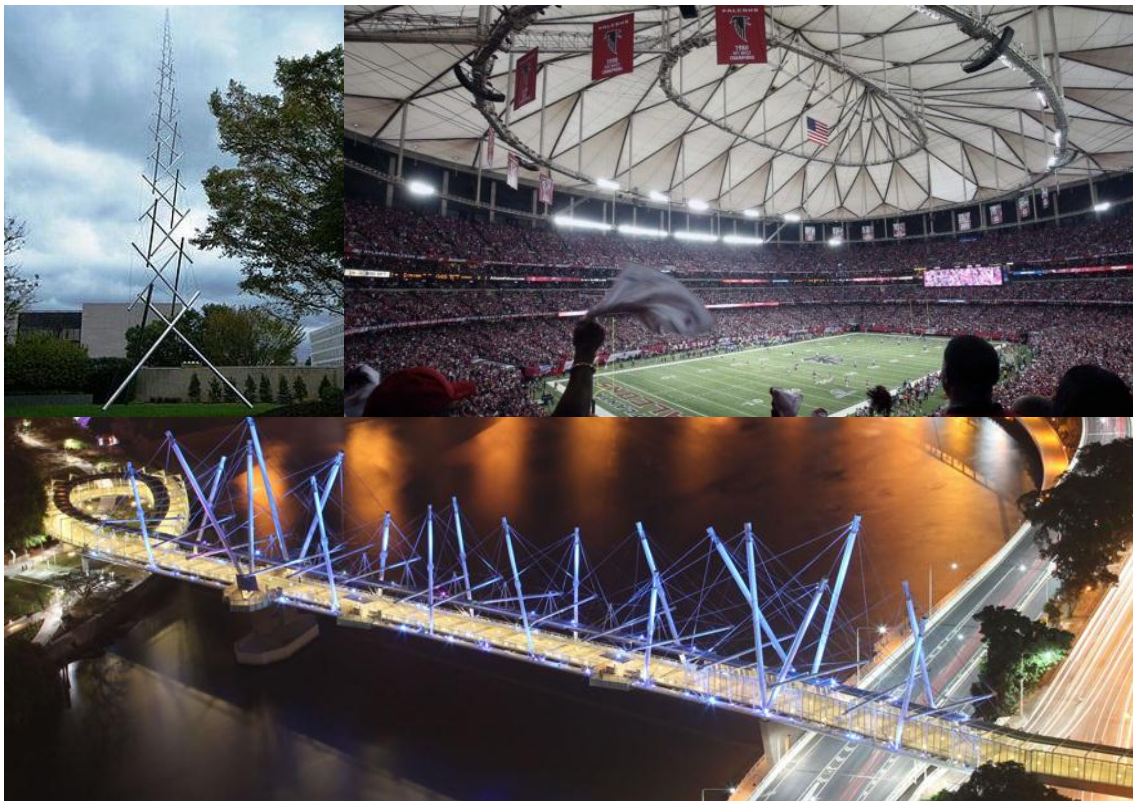


Figura 1.1 En la parte superior: The Needle Tower y Georgia Dome. En la parte inferior: Kurilpa Bridge.

1.2. Justificación

En Ecuador se han usado los sistemas estructurales convencionales para el diseño de puentes, entre ellos se encuentran los de arco, de viga, de armadura, voladizos, colgantes y atirantados. Sin embargo, es importante implementar sistemas alternativos, que aporten nuevas características. Una de las alternativas potenciales, es la tensegridad, debido a la pureza estructural del sistema.

Además, la tensegridad relaciona de manera única a la ingeniería y a la arquitectura, agregando un alto valor estético a la estructura y permitiendo que la correspondencia entre el comportamiento estructural y su forma se dé de la mejor manera. Esto se debe a que el análisis estructural y la forma deben ir de la mano ya que un pequeño cambio en la geometría altera el comportamiento de la estructura.

En este trabajo se trata de dar solución al problema de diseñar un puente peatonal con la cantidad mínima de apoyos intermedios. La tensegridad es una solución a este problema, además, permite construir estructuras muy ligeras y estéticas a la vez.



1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Diseñar un puente peatonal usando la tensegridad como sistema estructural alternativo, para presentarlo como un diseño válido e innovador en nuestro medio.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Encontrar una configuración geométrica para el puente peatonal.
- Realizar el diseño estructural para la configuración geométrica propuesta.
- Construir un modelo a escala del puente tensegrítico.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Definición del Sistema

Tensegridad es una palabra adaptada de su homóloga *tensegrity* en inglés, que a su vez, es el resultado de unir las palabras *tensional integrity*, que en español significa integridad tensional (Garia Barreno, 2009). El uso del adjetivo tensegrítico/a es muy usado para las estructuras que usan este sistema (Ochoa & Orellana, 2016).

Se han presentado algunas definiciones para la tensegridad, varias de estas expuestas por artistas, arquitectos, ingenieros y otros investigadores. Cada una de ellas recalca la importancia de la tensegridad en sus respectivas áreas. De esta forma todas las definiciones se complementan y permiten tener una visión general de lo que significa la tensegridad.

A continuación, se presentan algunas de las definiciones que Díaz Herrada (2014) y Blanco Blanch (2010) recopilan:

Fuller (1982) presenta dos definiciones: “Pequeñas islas de compresión en un mar de tensiones”. La segunda: “Tensegridad describe un principio en el que la forma estructural está garantizada por un número finito cerrado, integral, con tensión continua en el sistema y no por las conductas exclusivamente locales de los miembros de compresión discontinua”.

Snelson (1965) propone la siguiente definición: “La reciente invención se refiere a una estructura novedosa y mejorada de elementos alargados que se colocan por separado, ya sea en tensión o en compresión para formar un entramado, los miembros de compresión están separados entre sí y los miembros de tensión están conectados entre sí para formar una red de tensión continua”.

Pugh (1976) establece que: “Un sistema *tensegrity* se establece cuando un conjunto de elementos a compresión discontinuos interactúa con un conjunto de elementos a tracción continuos para definir un volumen estable en el espacio”.

“Los sistemas de Tensegridad son sistemas reticulares espaciales en un estado de auto-tensión. Todos sus elementos tienen una fibra media recta y son de tamaño equivalente. Los elementos tensados no tienen rigidez en compresión y constituyen un conjunto continuo. Los elementos comprimidos constituyen un conjunto discontinuo, cada nodo recibe uno y sólo un elemento comprimido” (Motro, 2003)

Skelton & de Oliveira (2009) proponen la siguiente definición “En ausencia de fuerzas externas, se deja que un conjunto de cuerpos rígidos en una configuración específica tenga conexiones sin torque (por ejemplo, mediante rótulas sin fricción). Entonces ésta forma una tensegridad si la configuración dada puede ser estabilizada mediante un conjunto de miembros internos a tracción, es decir, conectados entre los cuerpos rígidos. La configuración no es una tensegridad si no se requieren elementos de tracción y / o hay un conjunto de elementos a tracción para estabilizar la configuración.”

En los sistemas tensegríticos, la resistencia de los elementos sometidos a tensión depende directamente de la resistencia del material. Debido a que están sometidos únicamente a esta carga axial, para el diseño se puede usar la sección transversal mínima y así garantizar que los esfuerzos no sean mayores a los admisibles por el material.

Para los elementos sometidos a compresión será necesario el uso de secciones más grandes, ya que este tipo de elementos son susceptibles de sufrir inestabilidad por pandeo y esto no permite que se desarrolle toda la resistencia a compresión del material. Por lo tanto, la resistencia de un elemento comprimido depende de su esbeltez y en consecuencia de su longitud.

Debido a que los elementos a compresión tienen una menor relación resistencia-peso se puede decir que los elementos traccionados son más eficientes. Este problema se puede solventar acortando la longitud de los elementos a compresión, evitando así la inestabilidad por pandeo y obteniendo menos peso de la estructura (Ochoa & Orellana, 2016).

2.2. Comienzos de la Tensegridad

Richard Buckminster Fuller, David Georges Emmerich y Kenneth D. Snelson son considerados como inventores de la tensegridad. Aunque todos ellos se atribuyen el descubrimiento, fue Karl Loganson quien creó el primer prototipo de sistema tensegrítico (Figura 2.1), denominado *Gleichgewichtskonstruktion* en alemán y que en español significa Estructura de Equilibrio (Jáuregui, 2007).

Este artista realizó las primeras estructuras de tensegridad (*tensegrity prism*), expuestas en la exhibición de Obmokhu – Rusia, en 1921. En 1920, logra equilibrar tres barras, que no se chocan y están unidos con un cable tensado que une los extremos de las barras, como se puede ver en la siguiente figura (Burkhardt, 2004).

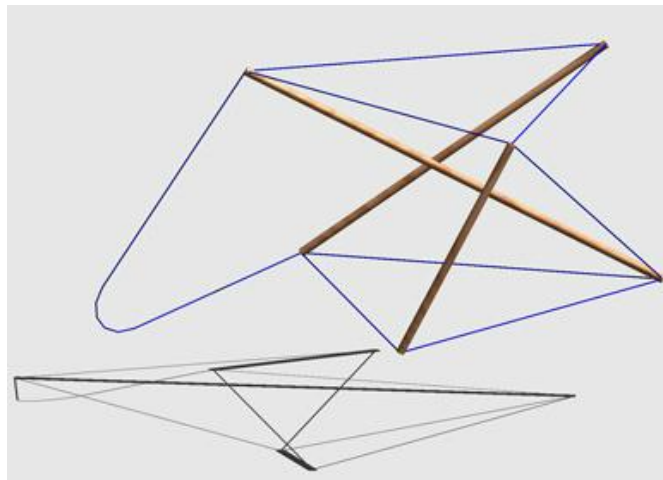


Figura 2.1 Estructura de Karl Loganson (Jáuregui, 2007).

Snelson (1996) en su artículo: *Snelson on the Tensegrity Invention*, narra cómo vivió el descubrimiento de la tensegridad y afirma que él inventó el sistema en 1948, y menciona también que fue Richard B. Fuller quien le dio el nombre de tensegridad cuando vio su trabajo, en donde equilibraba dos piezas de plywood en forma de “X”, a esta obra Snelson la llamó *Early X-piece* (Figura 2.2).



Figura 2.2 *Early X-piece* de Kenneth Snelson (Snelson, 2012): “WoodX-Column 1948”.

Richard Buckminster Fuller quien era profesor sustituto en *Black Mountain College* en Carolina del Norte, fue quien dio el nombre al sistema a finales de la década de los 40. Fuller conoció a Kenneth Snelson cuando este era su estudiante y se ofreció como ayudante para la creación de modelos que usaría el profesor en sus clases. Fuller vio en la *Early X Piece* de Snelson el potencial del sistema y dio el nombre de tensegridad al mismo (Díaz Herrada, 2014).

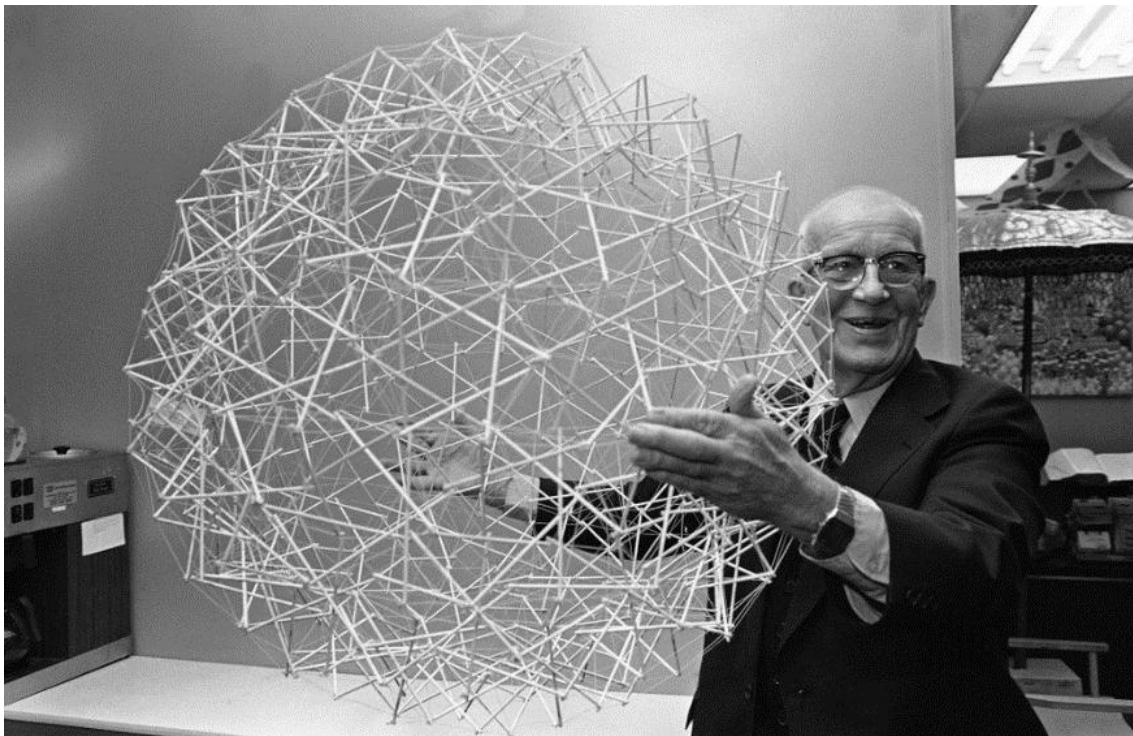


Figura 2.3 Buckminster Fuller sosteniendo una esfera de tensegridad (HELP DESIGN CO, n.d.).

Como una coincidencia muy interesante en 1958 David Georges Emmerich, arquitecto francés, investigaba sobre prismas tensegríticos y las combinaciones de estos en ensamblajes más complejos. Emmerich llamó a estos ensamblajes *structures tendues et autothédantes* que significa estructuras tensadas y auto pretensadas (Burkhardt, 2004). Los resultados que obtuvo Emmerich fueron del mismo tipo que los obtenidos por Snelson y Fuller.

Estos tres referentes siguieron desarrollando el sistema y aplicaron a patentes. Fuller y Emmerich estaban más interesados en aplicaciones arquitectónicas de este principio como domos y estructuras esféricas, mientras que Snelson explotó más la parte artística de la tensegridad (Ochoa & Orellana, 2016).

2.3. Conceptos Fundamentales

Para entender el comportamiento de las estructuras tensegríticas, en esta sección, son estudiadas las características más relevantes de este sistema, como la geometría, rigidez y estabilidad. Esto se realiza mediante los conceptos de búsqueda de forma, indeterminación estática y cinemática, estados de pre esfuerzo, estados de auto esfuerzo, estabilización de mecanismos infinitesimales, matriz de rigidez tangente y la rigidez de un sistema reticular pre esforzado. Estos conceptos se unifican en el análisis de la matriz de equilibrio que es la base conceptual del comportamiento de este sistema.

Debido a que las estructuras tensegríticas son un subconjunto de los sistemas reticulares articulados espaciales, sus elementos pueden estar sometidos únicamente a compresión o a tracción (Schenk, 2005). En lo que resta del presente trabajo, cuando se mencione los términos sistema, estructura o ensamblaje, se hará referencia a los sistemas tensegríticos.

2.3.1. Búsqueda de Forma (*Form Finding*)

Mediante el proceso de búsqueda de forma, se puede determinar una configuración geométrica inicial factible, en la mayoría de los casos en ausencia de cargas externas. La búsqueda de forma no se realiza únicamente para las estructuras en tensegridad, ya que en redes de cables y membranas tensadas, también es necesario realizar la búsqueda de forma, sin embargo, esto se torna más complicado para las estructuras tensegríticas (Schenk, 2005).

Se puede decir que existen dos conjuntos de métodos de búsqueda de forma, los de forma controlada y los de fuerza controlada. En el primer conjunto se encuentran los trabajos realizados por escultores como Snelson, basados en modelos físicos a pequeña escala para sus esculturas, sin ningún criterio de regularidad de los componentes, es decir un método de ensayo y error. El otro conjunto de métodos permite conocer la geometría inicial y la distribución de fuerzas internas en los componentes de la estructura, conocida como el modo de pre esfuerzo de un ensamblaje (Motro, 2006).

2.3.2. Indeterminación estática y cinemática

La indeterminación estática en una estructura sometida a la acción de cargas externas ocurre cuando las ecuaciones de equilibrio no son suficientes para encontrar las fuerzas internas en los elementos y desplazamientos de los nodos. Es decir, cuando una estructura tiene más elementos que los mínimos necesarios para garantizar el equilibrio, por lo tanto, admite más de una solución y la estructura tendrá uno o varios estados de pre esfuerzo (Schenk, 2005).

Por otro lado, la indeterminación cinemática se da cuando la estructura forma un mecanismo, ya que pueden existir variaciones de la geometría sin que fuerzas externas inserten energía en el sistema. Los mecanismos pueden ser finitos o infinitesimales (Schenk, 2005).

Mecanismos Finitos

Los mecanismos finitos ocurren cuando el cambio en la geometría del sistema no ha producido variaciones en la longitud de sus componentes. Para ejemplificar mejor este tipo de mecanismos se presenta en la Figura 2.4 un ensamble que consta de cuatro barras en donde los nodos **1** y **2** están completamente fijos y los nodos **3** y **4** están libres, el sistema puede moverse por las trayectorias marcadas con línea punteada, trazadas por los nodos **3** y **4** y tomar esa configuración geométrica (Motro, 2006).

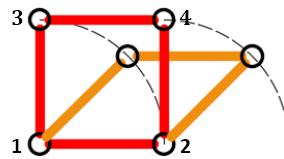


Figura 2.4 Ejemplo de mecanismo finito, adaptado de (Motro, 2006).

Mecanismos Infinitesimales

En el caso de los mecanismos infinitesimales el cambio de geometría en el sistema, produce variaciones infinitesimales en la longitud de sus componentes y estas son de menor orden que el desplazamiento (Schenk, 2005). En la Figura 2.5 el desplazamiento del punto **2** a **2'** es decir la distancia **d**, es conocido como mecanismo infinitesimal ya que se producen deformaciones infinitesimales Δl en los elementos, las cuales son proporcionales al cuadrado de la distancia **d** (Motro, 2006).

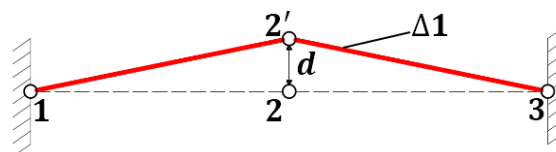


Figura 2.5 Ejemplo de mecanismo infinitesimal, adaptado de (Motro, 2006).

2.3.3. Pre Esfuerzo

Determinar la configuración geometría de una estructura tensegrítica, no es suficiente para determinar el estado inicial de esta. Los elementos deben estar sometidos a fuerzas axiales internas, correspondientes a un estado de pre esfuerzo y esto debe ocurrir sin aplicar cargas externas.

Para ejemplificar esta definición se considera un sistema en tres dimensiones que consta de cuatro elementos con un nodo común **1** y el otro extremo se encuentra fijo **2, 3, 4** y **5** (Figura 2.6 a). Si se asume que la longitud del elemento **4** (Figura 2.6 b) es menor a la distancia entre los nodos **1** y **4**, se

induce así un estado de pre esfuerzo. La equivalencia de colocar el elemento **4** se puede evidenciar en la Figura 2.6 c donde se reemplaza el elemento con dos fuerzas opuestas que actúan en los nodos **1** y **4**. La fuerza del nodo **1** introducirá esfuerzos en el resto de los elementos garantizando el equilibrio del nodo libre y creando así un estado inicial de esfuerzo es decir un pre esfuerzo (Motro, 2006).

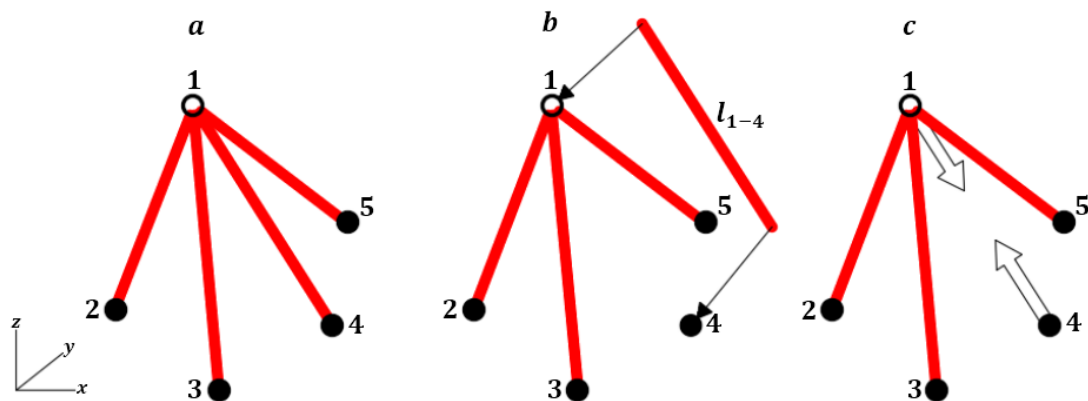


Figura 2.6 Estructura reticular. a) Sistema estáticamente indeterminado b) y c) Estado inicial de esfuerzo, adaptado de (Motro, 2006).

Aunque no se trate de una estructura tensegrítica, es evidente que los elementos están esforzados sin que sean aplicadas cargas externas. Es importante resaltar que, si la estructura no es hiperestática, esta no podrá admitir estados de pre esfuerzo; Esto debido a que en estructuras isostáticas, cualquier diferencia entre la longitud inicial del elemento y la distancia geométrica entre los nodos causará que la geometría del sistema cambie hasta ajustarse a la longitud inicial del elemento (Ochoa & Orellana, 2016).

2.3.4. Auto Esfuerzo

Como la definición de tensegridad especifica que se trata de un estado de auto equilibrio estable, la estructura con todos sus nodos libres, es capaz de presentar esfuerzos iniciales en sus componentes sin que fuerzas externas actúen sobre ellos. Motro (2006) denomina a este estado como auto esfuerzo y presenta un ejemplo en dos dimensiones, el cual es un cuadrado de elementos comprimidos con cables en sus diagonales y todos sus nodos están libres (Figura 2.7).

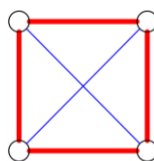


Figura 2.7 Estructura reticular auto tensada, adaptado de (Motro, 2006).

2.3.5. Estabilización de Mecanismos Infinitesimales

Los estados de pre esfuerzo y auto esfuerzo permiten la estabilización de los mecanismos infinitesimales, es decir, que si en algún momento se aplica una carga que active el mecanismo, este regresará a su posición inicial cuando la carga deje de actuar (Ochoa & Orellana, 2016).

Para ilustrar la estabilización de los mecanismos infinitesimales y entender de mejor manera este concepto, se tomará el ensamblaje de la Figura 2.5, y se provocará el estado de pre esfuerzo de tracción y el de compresión.

Estado de Pre Esfuerzo de Tracción

Si se escogen los elementos de tal manera que satisfagan la relación:

$$l_{ij} < d_{ij}$$

Siendo l_{ij} la longitud del elemento y d_{ij} la distancia entre los puntos donde irá colocado el elemento, entonces se tiene un estado de pre esfuerzo de tracción.

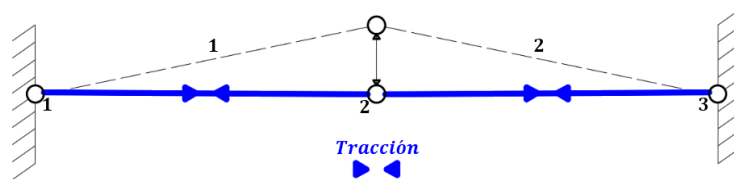


Figura 2.8 Estado de pre esfuerzo de Tracción: los elementos tenderán a quedarse en la posición de las líneas azules. Adaptado de (Motro, 2006).

Estado de Pre Esfuerzo de Compresión

Por otro lado, si se escogen los elementos de tal manera que satisfagan la relación:

$$l_{ij} > d_{ij}$$

Se produce un estado de pre esfuerzo de compresión.

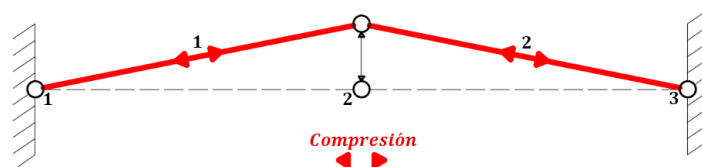


Figura 2.9 Estado de pre esfuerzo de Compresión: los elementos tenderán a quedarse en la posición de las líneas rojas, adaptado de (Motro, 2006).

Como se puede apreciar en la Figura 2.8, en el caso de la tracción, si se aplica una carga y luego se quita, los elementos vuelven a su posición inicial. Esto no ocurre si se hace lo mismo en el caso de la compresión (Figura 2.9).

(Motro, 2006) concluye este análisis diciendo que la estabilización de mecanismos infinitesimales mediante estados de pre esfuerzo o auto esfuerzo, es una característica esencial en los sistemas tensegríticos, aunque no todos los estados de pre esfuerzo permitan estabilizar mecanismos infinitesimales.

2.3.6. Matriz de Equilibrio

La matriz de equilibrio A y su transpuesta, llamada matriz de compatibilidad C , son las matrices clave para comprender la determinación estática y cinemática de una estructura articulada (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2015). La matriz A de orden $3n \times b$, cumple la siguiente igualdad:

$$At = f \quad (1)$$

Donde,

b = Número de elementos.

n = Número de nodos libres.

t = Fuerzas axiales internas en los elementos de dimensión $b \times 1$.

f = Fuerzas externas aplicadas en los nodos libres de dimensión $3n \times 1$.

Esta relación implica que, en cada nodo, las fuerzas externas se equilibran mediante la suma de las fuerzas axiales internas en los elementos que llegan al nodo. La obtención de la matriz de equilibrio se presenta en el ANEXO A.

Si se quiere conocer el estado de pre esfuerzo de un ensamblaje tensegrítico con una geometría específica, el valor de las fuerzas externas f debe ser cero (Schenk, 2005), entonces la ecuación (1) será igual a:

$$At = 0 \quad (2)$$

Esta expresión tiene dos soluciones, la trivial que es cuando todos los valores de t son cero y la solución en donde los valores de t dependen de uno más parámetros independientes. Esto es posible si el rango r de la matriz A es menor que el número de elementos b . El número de parámetros independientes es igual al número de soluciones independientes no triviales, es decir $b - r$.

Las soluciones no triviales del sistema (2), son un conjunto de vectores linealmente independientes y cualquier combinación lineal que se puedan realizar con estos vectores, también forma parte de la solución de (2). Estas

soluciones son conocidas como modos de pre esfuerzo independiente y satisfacen el equilibrio de los nodos de la estructura, sin tomar en cuenta el peso propio y fuerzas externas. (Yuan, Chen, & Dong, 2007). El signo que posea cada componente de cada vector solución, dependerá de si el elemento está traccionado (positivo) o comprimido (negativo).

Posibles Soluciones de $At = 0$

- Si la única solución es la trivial, la estructura no es pre tensable.
- Si existe un solo modo de pre esfuerzo independiente, este es la única distribución de fuerzas con la que puede pre esforzarse la estructura.
- Si existen dos o más modos de pre esfuerzo independientes, cada uno es una distribución de auto equilibrio y las combinaciones lineales que se puedan realizar con estas soluciones, llevan también a una distribución válida

2.3.7. Matriz de Compatibilidad

Por otro lado, la matriz C de orden $b \times 3n$ se define con la siguiente expresión:

$$Cd = e \quad (3)$$

Donde,

d = Vector de desplazamientos de los nodos libres, de dimensión $3n \times 1$.

e = Vector de deformaciones axiales de los elementos que conforman la estructura, de dimensión $b \times 1$.

La ecuación (3) muestra la compatibilidad entre el desplazamiento de los nodos del ensamblaje y las deformaciones axiales de sus elementos. Los mecanismos que existen en la estructura, se constituyen por los desplazamientos nodales que ocurren sin producir deformaciones axiales de los elementos. Esto se puede evidenciar en la ecuación (4).

$$Cd = 0 \quad (4)$$

Como se puede ver (4) puede admitir soluciones paramétricas, al igual que (2). Estas soluciones son los modos de desplazamiento sin deformaciones axiales, es decir los mecanismos de la estructura (Schenk, 2005).

(Schenk, 2005), demuestra por medio de los trabajos virtuales en el capítulo de dualidad estática-cinemática que:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}^T \quad (5)$$

Debido a que las estructuras tensegríticas son un subconjunto de los sistemas reticulares espaciales, el número de modos de pre esfuerzo independientes \mathbf{s} y el número de mecanismos internos \mathbf{m} , se definen como:

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{r} \quad (6)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{N} - \mathbf{r} \quad (7)$$

Donde \mathbf{N} es el número de grados de libertad. Si se despeja \mathbf{r} en las ecuaciones (6) y (7) , y se las iguala, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\mathbf{s} - \mathbf{b} = \mathbf{m} - \mathbf{N} \quad (8)$$

La expresión (8) clasifica a los sistemas reticulares espaciales como se muestra en la (Tabla 2.1). Además, esta expresión se conoce como la regla extendida de Maxwell (Schenk, 2005).

Tabla 2.1 Clasificación de los sistemas reticulares (Schenk, 2005).

TIPO	Valores para \mathbf{r}	Valores para \mathbf{s}	Valores para \mathbf{m}	Propiedades Estáticas y Cinemáticas
1	$= \mathbf{b}$ $= \mathbf{N}$	0	0	Sistemas Estática y Cinemáticamente Determinados.
2	$= \mathbf{b}$ $< \mathbf{N}$	0	$\mathbf{N} - \mathbf{r}$	Sistemas Cinemáticamente Indeterminados.
3	$< \mathbf{b}$ $= \mathbf{N}$	$\mathbf{b} - \mathbf{r}$	0	Sistemas Estáticamente Indeterminados.
4	$< \mathbf{b}$ $< \mathbf{N}$	$\mathbf{b} - \mathbf{r}$	$\mathbf{N} - \mathbf{r}$	Sistemas Estática y Cinemáticamente Indeterminados.

Las estructuras tensegríticas son sistemas estática y cinemáticamente indeterminados, es decir admiten pre esfuerzo y poseen mecanismos internos infinitesimales respectivamente, esto coloca a estas estructuras dentro de los sistemas tipo 4 de esta clasificación.

Si existe al menos un modo de pre esfuerzo que estabilice los mecanismos internos, la estabilidad de estas estructuras está asegurada. También se debe tomar en cuenta que este modo de pre esfuerzo debe coincidir con la rigidez unilateral de los elementos, es decir barras comprimidas y cables tensados.

2.3.8. Matriz de Rigidez Tangente

Las estructuras en un análisis lineal estático, se modelan de manera que se cumple con (9), siendo esta la relación entre fuerzas aplicadas en los nodos f , y los desplazamientos d producidos por estas fuerzas.

$$f = Kd \quad (9)$$

Siendo K la matriz de rigidez, si se tienen pequeñas deformaciones en los elementos, su valor es constante. El valor de K también depende las propiedades geométricas y mecánicas del material de los elementos de la estructura y de la geometría de la misma. Los desplazamientos nodales d producidos por las fuerzas externas, se determinan resolviendo el sistema (9). Las fuerzas axiales internas de los elementos y sus deformaciones, se pueden encontrar resolviendo las ecuaciones (1) y (3).

Cuando ocurren desplazamientos nodales grandes, el comportamiento se vuelve no lineal y gracias a la geometría cambiante de la estructura, la matriz de rigidez pasa a ser una variable dependiente de dicha geometría. En esta situación, el proceso para encontrar los desplazamientos d se torna iterativo. Para solucionar los sistemas geoméricamente no lineales, se deben realizar análisis de tipo lineal en cada etapa de iteración.

En cada iteración la matriz de rigidez K se ensambla nuevamente y se usa en el siguiente paso iterativo, de tal manera que cuando se lleve a cabo la iteración i se lleva a cabo un análisis lineal utilizando la matriz de rigidez de la iteración anterior es decir del paso $i - 1$. Este proceso se debe realizar hasta llegar al criterio de convergencia. La exactitud de la solución va en función de los pasos o iteraciones que se establezca, esta será mayor mientras más iteraciones se realicen.

La matriz de rigidez que se ensambla nuevamente en cada iteración, tiene como nombre Matriz de Rigidez Tangente. Ya que las estructuras tensegríticas tienen un comportamiento geoméricamente no lineal, es necesario aplicar el análisis descrito anteriormente.

2.3.9. Rigidez de un Sistema Reticular Pre esforzado

Un sistema reticular pre esforzado posee un comportamiento geoméricamente no lineal. Por esta razón, la determinación de la matriz de rigidez tangente para ese tipo de sistemas es esencial.

Guest (2006) realiza una deducción de la matriz de rigidez para estos sistemas e inicia con el caso de un elemento individual y luego extiende esta demostración para una estructura completa.

A continuación, se presenta la deducción de la matriz de rigidez tangente que realiza Guest de manera resumida, para la deducción completa referirse a la bibliografía:

Elemento Individual

Si se tiene el elemento de la Figura 2.10, libre en el espacio, donde las fuerzas f_1 y f_2 en forma de vector se equilibran con la tensión interna t del elemento. Los vectores f_1 y f_2 , pueden estar en 2D o 3D, y sus componentes son f_{1i} y f_{2i} respectivamente. El elemento conecta dos nodos a los cuales se les asigna los vectores de posición x_1 y x_2 , al igual que los vectores de las fuerzas, estos se encuentran en 2D o 3D. El vector unitario del elemento se define mediante la relación $u = (x_1 - x_2)/l$, donde l es la longitud del elemento.

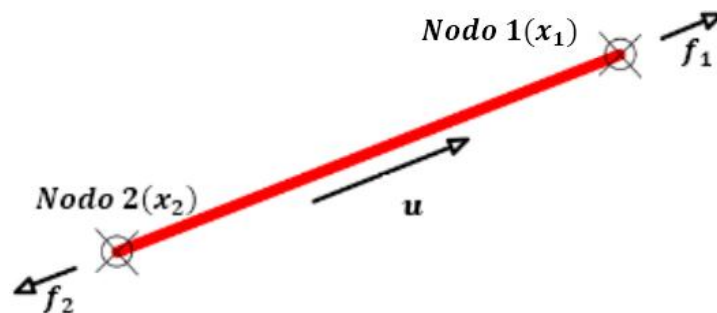


Figura 2.10 Diagrama de cuerpo libre de un elemento individual, adaptado de (Guest, 2006).

Para realizar la demostración se definen las siguientes expresiones:

$$\hat{t} = \frac{t}{l} \quad (10)$$

$$\hat{g} = g - \hat{t} \quad (11)$$

$$g = \frac{dt}{dl} \quad (12)$$

en donde:

\hat{t} = Coeficiente de tensión.

\hat{g} = Rigidez axial modificada.

g = Rigidez axial del Elemento.

Además, se asume un elemento lineal elástico, es decir que este posee: sección transversal A módulo elástico E y longitud inicial l_0 , para definir:

$$\frac{dt}{dl} = \frac{AE}{l_0} \quad (13)$$

La matriz de rigidez tangente K_s , se define como:

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{bmatrix} = K_s \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$K_s = \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix} [\hat{g}] [u^T \quad -u^T] + \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (15)$$

en donde:

I = Matriz Identidad.

u = Vector unitario del Elemento.

Y la ecuación (15) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$K_s = a_s [\hat{g}] a_s^T + S_s \quad (16)$$

en donde:

a_s = Matriz de equilibrio del elemento individual (17).

S_s = Matriz de esfuerzo del elemento (18).

$$a_s = \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$S_s = \begin{bmatrix} \hat{t}I & -\hat{t}I \\ -\hat{t}I & \hat{t}I \end{bmatrix} \quad (18)$$

Estructura Completa

La matriz de rigidez tangente de una estructura completa, se consigue sumando las matrices de rigidez de los elementos individuales que conforman el ensamblaje. Cuando esto se realiza las matrices de rigidez tangente de los elementos individuales deben estar planteadas en coordenadas globales. Para una estructura compuesta se define que:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (20)$$

en donde,

n = Nodos de la estructura.

\mathbf{f} = Vector de fuerzas nodales externas.

f_i = Vector de fuerza bidimensional o tridimensional en el nodo i .

\mathbf{x} = Vector de coordenadas nodales.

x_i = Vector de posición bidimensional o tridimensional en el nodo i .

Si se tiene un elemento p , con las siguientes propiedades:

- Conecta a los nodos i y j .
- Longitud l_p .
- Tensión interna t_p .
- Coeficiente de tensión \hat{t} .
- Rigidez axial modificada \hat{g}_p .

El vector unitario \mathbf{u}_{ij} paralelo al elemento p es:

$$\mathbf{u}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{l_p} = -\mathbf{u}_{ji} \quad (21)$$

La matriz de equilibrio del elemento individual \mathbf{a}_p viene dada por:

$$\mathbf{a}_p = \begin{bmatrix} a_{p1} \\ a_{p2} \\ \vdots \\ a_{pi} \\ \vdots \\ a_{pn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$a_{pi} = u_{ij}; \quad a_{pj} = u_{ji} = -u_{ij}; \quad a_{pk} = 0, \text{ si } k \neq i \text{ y } k \neq j$$

Esta matriz tiene el valor de cero en todas las componentes que no corresponden a los nodos i y j , conectados por el elemento p .

Por otro lado, la matriz de esfuerzos en coordenadas globales para el elemento individual p que conecta a los nodos i y j , se define mediante submatrices del tipo S_{plm} .

$$S_p = \begin{bmatrix} S_{p11} & S_{p12} & \dots & S_{p1n} \\ S_{p21} & S_{p22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ S_{pn1} & & & S_{pnn} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$s_{pii} = s_{pjj} = \hat{t}_p I; s_{pij} = s_{pji} = -\hat{t}_p I; s_{plm} = 0 \text{ Para el resto de casos}$$

Si se escribe la matriz de rigidez tangente K_p del elemento p , de la misma forma que en la ecuación (16), en términos de las coordenadas globales se tiene que:

$$K_p = a_p [\hat{g}_p] a_p^T + S_p \quad (24)$$

Analizando una estructura de b elementos. Su matriz de rigidez tangente total K será igual a:

$$K = \sum_{p=1}^b K_p = \sum_{p=1}^b a_p [\hat{g}_p] a_p^T + \sum_{p=1}^b S_p \quad (25)$$

$$K = A \hat{G} A^T + S \quad (26)$$

Donde:

A = Matriz de equilibrio de toda la estructura.

\hat{G} = Matriz diagonal de rigideces axiales modificadas de los elementos.

S = Matriz de esfuerzo de la estructura entera.

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_b] \quad (27)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \hat{g}_1 & & & \\ & \hat{g}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{g}_b \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ s_{n1} & & & s_{nn} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Para $l = m, s_{ll} = \hat{t}_{ll}I$
Para $l \neq m, s_{lm} = -\hat{t}_{lm}I$

en donde,

\hat{t}_{ll} = Suma de los coeficientes de tensión de todos los elementos que llegan al nodo l .

\hat{t}_{lm} = Coeficiente de tensión del elemento que une los nodos l y m . Posee un valor si los unos se conectan con un elemento, si no éste es igual a 0.

Para el modelamiento matemático de estructuras tensegríticas es muy necesaria la matriz de rigidez tangente de la ecuación (26). Los efectos del pre esfuerzo en el comportamiento de estas estructuras durante el proceso de análisis no lineal, se pueden tener gracias a los conceptos presentados en (10), (11), (28) y (29).

2.4. Estado del Arte

Desde la creación de la Tensegridad, se han realizado avances importantes relacionados a la búsqueda de forma y pre esfuerzo de estas estructuras. Empezando con los trabajos realizados por Loganson, Snelson, Buckminster Fuller y Emmerich, usando métodos de ensayo y error con la experimentación de modelos físicos de poliedros convexos regulares como base para encontrar nuevas configuraciones (Motro, 2006) (Tibert & Pellegrino, 2011). Hasta llegar a desarrollar métodos matemáticos que permiten solventar el problema de búsqueda de forma y pre esfuerzo.

Por medio de algoritmos que los investigadores proponen en la bibliografía de algunos de los métodos, éstos se pueden programar para realizar la búsqueda de forma y pre esfuerzo de una manera más sencilla y optimizada.

En los siguientes subcapítulos, se presentan los métodos de búsqueda de forma y pre esfuerzo, que han sido desarrollados en las últimas décadas por las personas comprometidas en el estudio de los temas referentes a tensegridad. Además, se muestran los tipos de tensegridad que existen y las aplicaciones que tiene el sistema, con ejemplos reales que se han llegado a construir y que se han convertido en los referentes de la tensegridad.

2.4.1. Métodos de Búsqueda de Forma

Los métodos de búsqueda de forma se dividen en dos grupos: los cinemáticos y los estáticos. Para cada grupo se puede obtener una solución analítica de módulos tensegríticos básicos, esto solo se puede realizar para casos con pocos parámetros. Si se tiene un ensamblaje con un gran número de parámetros se recurre a otros métodos. Algunos de ellos pueden servir incluso en la búsqueda de formas completamente nuevas en tensegridad y otros necesitarán una geometría inicial que se parezca a la que se desea obtener para realizar el análisis (Tibert & Pellegrino, 2011).

2.4.1.1. Métodos Cinemáticos de Búsqueda de Forma

Existen dos formas en las que trabajan los métodos cinemáticos de búsqueda de forma: la primera es cuando se mantiene constante la longitud de los cables y la longitud de las barras se incrementa hasta un máximo. La segunda, se da cuando se mantiene constante la longitud de las barras y la longitud de los cables se reduce hasta un mínimo.

Soluciones Analíticas

Si se tiene un prisma tensegrítico, en donde las barras conecten los vértices de los polígonos de las bases y los cables sean las aristas de este prisma. Se puede encontrar el ángulo de giro θ , ya que depende del número de vértices v y del desfase entre los vértices conectados por una barra. Para la configuración inicial, los cables están totalmente verticales y el ángulo en el plano que se forma entre las proyecciones de los extremos de la barra es igual a $2\pi i/v$, donde i es un entero y no puede ser mayor a v . Al introducir el giro entre los polígonos de las bases se obtiene el ángulo θ , como se muestra en la Figura 2.11.

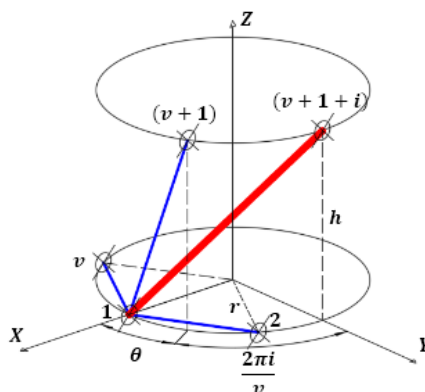


Figura 2.11 Elementos que se juntan en el nodo 1 de una estructura tensegrítica simple basada en un prisma de altura h y radio r , adaptado de (Tibert & Pellegrino, 2011).

Como se muestra en la Figura 2.11, los nodos **1** y **(v + 1)** se unen mediante el cable **l_c** , mientras que los nodos **1** y **(v + 1 + i)**, se conectan mediante la barra **l_b** . Sus longitudes se calculan con las ecuaciones (30) y (31):

$$l_c^2 = 2r^2(1 - \cos \theta) + h^2 \quad (30)$$

$$l_b^2 = 2r^2 \left[1 - \cos \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) \right] + h^2 \quad (31)$$

Restando (31) - (30) y simplificando la expresión resultante, se obtiene que la longitud de la barra es igual a:

$$l_b^2 = 4r^2 \sin \left(\theta + \frac{\pi i}{v} \right) \sin \frac{\pi i}{v} + l_c^2 \quad (32)$$

El valor máximo de **l_b** ocurre cuando:

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (33)$$

Relajación Dinámica

Este método propuesto por Motro y Belckacem, como un método general de Búsqueda de Forma para tensegridades, permitió diseñar satisfactoriamente estructuras de cables y membranas (Tibert & Pellegrino, 2011).

El estado general de equilibrio de fuerzas para una estructura con geometría inicial dada, se obtiene a través de la integración de la ecuación dinámica ficticia (34), resultado de transformar un problema estático simulando una vibración amortiguada de la estructura (Tibert & Pellegrino, 2011):

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = f \quad (34)$$

Donde

K = Matriz rigidez.

M = Matriz de masas.

C = Matriz de coeficientes de amortiguamiento.

f = Vector de cargas externas, y

\ddot{d}, \dot{d} y d = Vectores de aceleración, velocidad y desplazamiento para una configuración inicial respectivamente.

Por lo general se da los mismos valores a todos los coeficientes de la matriz \mathbf{C} , para aumentar la velocidad de convergencia. También se suele usar una técnica llamada amortiguación cinética, que rastrea el movimiento no amortiguado de la estructura (Tibert & Pellegrino, 2011).

2.4.1.2. Métodos Estáticos de Búsqueda de Forma

Lo que caracteriza a este tipo de métodos, es que se crea una relación entre las configuraciones de equilibrio de una estructura con geometría dada y las fuerzas en sus componentes (Tibert & Pellegrino, 2011).

Soluciones Analíticas

Para obtener estas soluciones analíticas, se aprovecha el equilibrio en los nodos y la simetría del ensamblaje. En el ejemplo de la Figura 2.11, se analiza el equilibrio en un nodo al que llegan ciertos elementos, usando sus coeficientes de tensión $\hat{\mathbf{t}}$, obtenidos con la ecuación (10). Como se puede apreciar en la Figura 2.11 los elementos de la estructura pueden separarse en tres grupos de simetría. Analizando el nodo **1**, se plantea el equilibrio en las direcciones **z** y **y** obteniendo las ecuaciones (35) y (36) respectivamente:

$$\hat{\mathbf{t}}_d \mathbf{h} + \hat{\mathbf{t}}_b \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{t}}_d r \sin \theta + \hat{\mathbf{t}}_b r \sin \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) = 0 \quad (36)$$

Donde

$\hat{\mathbf{t}}_h, \hat{\mathbf{t}}_d$ y $\hat{\mathbf{t}}_b$ = Coeficientes de tensión de cada grupo de simetría (cables horizontales, cables diagonales y barras, respectivamente).

Si se multiplica a (35) por el factor $\frac{r \sin(\theta + \frac{2\pi i}{v})}{h}$ y se resta (36) - (35), se obtiene:

$$\hat{\mathbf{t}}_d \left[\sin \theta - \sin \left(\theta + \frac{2\pi i}{v} \right) \right] = 0 \quad (37)$$

La solución de la ecuación (37) conduce a

$$\theta = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{v} \right) \quad (38)$$

Solución que es idéntica a la obtenida en (33).

Método de la Densidad de Fuerza

Este método propuesto por Linkwitz y Sheck en 1971 (Tibert & Pellegrino, 2011), transforma en un conjunto de ecuaciones lineales a las ecuaciones no lineales de equilibrio de los nodos. La densidad de la fuerza de un elemento que une los nodos i y j , es la siguiente:

$$q_{ij} = \frac{t_{ij}}{l_{ij}} \quad (39)$$

Si comparamos las ecuaciones (10) y (39) se puede deducir que el coeficiente de tensión es la densidad de fuerza. Como ya se mencionó anteriormente, estos valores deben estar acompañados de un signo: positivo cuando el elemento está traccionado y negativo cuando está comprimido.

Para comprender el principio del método de densidad de la fuerza, se analiza el equilibrio en la dirección x , del nodo i , en donde se unen m barras. Si las coordenadas en x de los nodos de una barra son x_i y x_j , entonces el vector unitario en la dirección de la barra será:

$$\frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}} \quad (40)$$

Si f_{xi} es la fuerza externa en dirección x , aplicada en el nodo i , entonces el equilibrio se plantea como:

$$\sum_{j=1}^m t_{ij} \frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}} = f_{xi} \quad (41)$$

Debido a que (39) = (10), el equilibrio en x, y y z se reescribe como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m q_{ij}(x_i - x_j) &= f_{xi} \\ \sum_{j=1}^m q_{ij}(y_i - y_j) &= f_{yi} \\ \sum_{j=1}^m q_{ij}(z_i - z_j) &= f_{zi} \end{aligned} \quad (42)$$

Para una estructura de b barras y n nodos se definen las siguientes matrices:

C_s = Matriz de conectividad de orden $b \times n$.

Q = Matriz de densidades de fuerza de orden $b \times b$ (matriz diagonal).

f_x, f_y y f_z = Vectores de componentes de las fuerzas externas.

X, Y y Z = Vectores de coordenadas nodales.

Las ecuaciones en todas las direcciones, del Método de Densidades de Fuerza para una estructura serán:

$$\begin{aligned} C_s^T Q C_s X &= f_x \\ C_s^T Q C_s Y &= f_y \\ C_s^T Q C_s Z &= f_z \end{aligned} \quad (43)$$

Se descompone C_s , en dos submatrices de tal manera que:

$$C_s = [C_u \quad C_f] \quad (44)$$

Donde:

C_u = Matriz de orden $b \times n - k$, en la que cada columna corresponde a un nodo desconocido.

C_f = Matriz de orden $b \times k$ cuyas columnas corresponden a nodos fijos de coordenadas conocidas.

k = Número de nodos conocidos. ($0 < k < n$).

Si se realiza la misma descomposición del vector X , siendo X_u el vector de componentes desconocidas y X_f el vector de componentes conocidas. Las expresiones de (43) se pueden reescriben como:

$$\begin{aligned} C_u^T Q C_u X_u &= f_x - C_u^T Q C_f X_f \\ C_u^T Q C_u Y_u &= f_y - C_u^T Q C_f Y_f \\ C_u^T Q C_u Z_u &= f_z - C_u^T Q C_f Z_f \end{aligned} \quad (45)$$

Como en los casos anteriores, para encontrar la configuración geométrica inicial, a la fuerza externa se le asigna el valor de cero. Luego se elijen densidades de fuerza y se resuelven las ecuaciones (45), para obtener las coordenadas de los nodos. Estas coordenadas permiten el cálculo de la longitud de los elementos. Las densidades de fuerza y la geometría calculada sirven para determinar las fuerzas internas en los elementos.



Cuando todos los elementos de una estructura están traccionados, la matriz $\mathbf{C}_u^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_u$ se define positiva, por lo tanto es invertible y tiene una única solución (Vassart & Motro, 1999). Si los elementos están en compresión y tracción, la matriz $\mathbf{C}_u^T \mathbf{Q} \mathbf{C}_u$ es singular, es decir, no tiene inversa. En este caso, la solución al sistema, se puede encontrar, sólo cuando esta matriz tenga una deficiencia de rango o nulidad de al menos 4 para estructuras tridimensionales y 3 para estructuras bidimensionales (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2006).

Escenarios para distintos valores de la nulidad:

- 1, Todos los nodos se degeneran en un solo punto llamado punto base.
- 2, Los nodos permanecen en una línea.
- 3, Se forma una estructura bidimensional.
- 4, Se forma un ensamblaje tridimensional.

El problema del Método de la Densidad de Fuerza cuando se aplica en estructuras tensegríticas, es determinar el conjunto de densidades de fuerza que produzcan la nulidad. Para solventar este problema, (Vassart & Motro, 1999), presentan tres métodos:

- Método Intuitivo: Se aplica para estructuras con pocos elementos
- Método Iterativo: En varias iteraciones, se evalúan y modifican las densidades de fuerza para alcanzar los requerimientos de rango.
- Método Analítico: Se analizan las matrices de manera simbólica y no se recomienda cuando el ensamblaje posee muchos elementos.

2.4.2. Métodos de Búsqueda del Pre esfuerzo

Para determinar la distribución de fuerzas internas iniciales en los elementos de una estructura con geometría dada, es necesario determinar el espacio nulo de \mathbf{A} , que equivale a dar solución al sistema de ecuaciones $\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{0}$. Siendo \mathbf{A} , la matriz de equilibrio de la estructura.

Para solucionar el sistema $\mathbf{A} \mathbf{t} = \mathbf{0}$, se dispone de una factorización muy útil, llamada descomposición en valores singulares (SVD por sus siglas en inglés). (Yuan et al., 2007) y (Z. Zhang, Dong, & Fu, 2008) proponen a partir de la SVD dos métodos para encontrar la distribución inicial de fuerzas internas en sistemas reticulares pre esforzados.

2.4.2.1. Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Si se tiene una matriz A de orden $m \times n$ y rango r , esta posee r valores singulares σ_i diferentes de cero, ordenados descendientemente, que a su vez son las raíces cuadradas de los valores propios λ_i de la matriz $A^T A$.

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i} \quad (46)$$

La factorización SVD se define como:

$$A = U \Sigma V^T \quad (47)$$

En donde:

$$\Sigma_{m \times n} = \begin{bmatrix} D_{r \times r} & \mathbf{0}_{r \times (n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r) \times r} & \mathbf{0}_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

U = Matriz ortogonal de orden $m \times m$, cuyas columnas son los vectores singulares izquierdos de A .

V = Matriz ortogonal de orden $n \times n$, cuyas columnas son los vectores singulares derechos de A .

Como V es ortogonal se cumple que:

$$V^T = V^{-1} \quad (50)$$

Si se multiplica la ecuación (47) por V a cada lado de la igualdad, se tiene que:

$$AV = U \Sigma \quad (51)$$

Como se puede apreciar en la expresión (48), esta se definió de manera que las últimas $n - r$ columnas son iguales al vector nulo. Consecuentemente, las $n - r$ columnas del producto $U \Sigma$, también serán iguales al vector nulo. Si asignamos v_i al i -ésimo vector columna de V , se deduce de (51) que:

$$Av_i = 0 \quad \text{para } r < i \leq n \quad (52)$$

Si se compara la ecuación (52) con el sistema $At = 0$, se evidencia que, mediante la SVD de la matriz A , es posible encontrar la distribución de fuerzas internas iniciales de los elementos de una estructura, obteniendo así un modo de pre esfuerzo independiente.

2.4.2.2. Doble Descomposición en Valores Singulares (DSVD)

Yuan et al. (2007) propusieron el método DSVD para el diseño de pre esfuerzo de domos de cable, aunque este también se puede aplicar a las demás estructuras reticulares pre esforzadas. Para el desarrollo de este método se definieron los siguientes conceptos:

Modo de pre esfuerzo independiente, T : Es un modo que se obtiene a partir de la solución del sistema $At = 0$ (Sólo se toma en cuenta el auto equilibrio).

Modo de pre esfuerzo integral, W : Es una combinación lineal de los modos de pre esfuerzo independiente (También considera la simetría de la estructura).

Modo factible de pre esfuerzo integral: Es una combinación lineal de los modos integrales de pre esfuerzo (Cumple con la condición de rigidez unilateral de los elementos, es decir: barras comprimidas y cables tensados).

Luego de ensamblar la matriz de equilibrio A de una estructura con b elementos, se le aplica la SVD y se encuentran los s modos de pre esfuerzo independientes T_i . Estos valores son los que se obtuvieron como v_i en (52).

Seguidamente, se determina el modo de pre esfuerzo integral, como la combinación lineal de T :

$$W = T_1\alpha_1 + T_2\alpha_2 + \dots + T_i\alpha_i + \dots + T_s\alpha_s \quad (53)$$

En donde los coeficientes de participación α_i son constantes reales. Para incluir la simetría de la estructura, los elementos simétricos se consideran como parte de un mismo grupo y se les asigna el mismo valor de pre esfuerzo. Con n grupos de simetría en una estructura de b elementos se tiene:

$$W_{b \times 1} = [w_1 \quad w_1 \quad w_1 \quad w_1 \quad \dots \quad w_i \quad w_i \quad \dots \quad w_n \quad \dots \quad w_n]^T \quad (54)$$

Que también puede expresarse como:

$$W_{b \times 1} = [e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_i \ \cdots \ e_n]_{b \times n} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_i \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad (55)$$

en donde,

e_i = Vector de $b \times 1$, contiene la unidad en las componentes del i-ésimo grupo y cero en las demás.

Combinando las ecuaciones (53) y (55), se obtiene:

$$T_1 \alpha_1 + T_2 \alpha_2 + \cdots + T_s \alpha_s + (-e_1 w_1) + (-e_2 w_2) + \cdots + (-e_n w_n) = 0 \quad (56)$$

Si se expresa de forma matricial:

$$\bar{T} \bar{\alpha} = 0 \quad (57)$$

En donde \bar{T} es de orden $b \times (s + n)$ y $\bar{\alpha}$ es un vector con $(s + n)$ componentes:

$$\bar{T} = [T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_s \ -e_1 \ -e_2 \ \cdots \ -e_n] \quad (58)$$

$$\bar{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_s \ w_1 \ w_2 \ \cdots \ w_n]^T \quad (59)$$

Si se aplica la SVD nuevamente a la ecuación (57) se tiene:

$$\bar{T} = \bar{U} \bar{\Sigma} \bar{V}^T \quad (60)$$

En donde:

\bar{U} = Matriz ortogonal de orden $b \times b$, cuyas columnas son los vectores singulares izquierdos de \bar{T} .

\bar{V} = Matriz ortogonal de orden $(s + n) \times (s + n)$, cuyas columnas son los vectores singulares derechos de \bar{T} .

$\bar{\Sigma}$ = Matriz de orden $b \times (s + n)$, que en su diagonal se encuentran los valores singulares no nulos de \bar{T} y sus demás componentes son cero.

Si se define como \bar{r} , al rango de \bar{T} y \bar{v}_i como el i -ésimo vector columna de V , se deduce que:

$$\bar{T}\bar{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{para } \bar{r} < i \leq (s+n) \quad (61)$$

Los vectores \bar{v}_i , con $\bar{r} < i \leq (s+n)$, son los modos de pre esforzado integral, es decir $[w_1 w_2 \cdots w_n]^T$. Como se mencionó anteriormente, estos modos además de incluir el auto equilibrio de la estructura, también incluyen la simetría de la misma y asigna los mismos valores de pre esfuerzo a los elementos que pertenezcan al mismo grupo de simetría.

Posibles Respuestas:

- Si existe un solo modo de pre esfuerzo integral y este cumple con la condición de rigidez unilateral de los elementos, éste es el modo factible de pre esfuerzo integral.
- Si solo existe un modo de pre esfuerzo integral pero no cumple con la condición de rigidez unilateral de los elementos, la estructura no se puede pretensar.
- Si existe varios modos de pre esfuerzo integral w_1, w_2, \dots, w_i el modo factible de pre esfuerzo integral se puede obtener al realizar una combinación lineal $w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \dots + w_i\beta_i$.

En el último caso, se deben encontrar los factores β_i , mediante la optimización de la combinación lineal $w_1\beta_1 + w_2\beta_2 + \dots + w_i\beta_i$.

2.4.2.3. Método de Deducción Lineal

Z. Zhang et al. (2008), proponen un proceso iterativo, que usa la seudo inversa A^+ de la matriz de equilibrio A de orden $m \times n$ y rango r . Para obtener la seudo inversa de A , se realiza una descomposición en valores singulares reducida a la matriz (Lay, 2007).

Si Σ posee filas o columnas de ceros, U y V se pueden dividir como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} U &= [U_r \quad U_{m-r}] \\ V &= [V_r \quad V_{m-r}] \\ U_r &= [u_1 \quad \cdots \quad u_i \quad \cdots \quad u_r] \\ V_r &= [v_1 \quad \cdots \quad v_i \quad \cdots \quad v_r] \end{aligned} \quad (62)$$

En donde

U_r = Submatriz de orden $m \times r$.

V_r = Submatriz de orden $n \times r$.

La SVD de la matriz de equilibrio será igual a:

$$A = [U_r \quad U_{m-r}] \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_{n-r}^T \end{bmatrix} = U_r D V_r^T \quad (63)$$

$$A = U_r D V_r^T$$

Esta expresión es la descomposición en valores singulares reducida de A . Como D es diagonal y sus componentes son diferentes de cero, esta es invertible. Por lo tanto, la seudo inversa de A , se establece como:

$$A^+ = V_r D^{-1} U_r^T \quad (64)$$

A^+ de orden $n \times m$ cumple con la siguiente igualdad.

$$A^+ A = I_{n \times n} \quad (65)$$

Esto se aprovecha para el planteamiento del método de deducción lineal, el cual se fundamenta en las siguientes ecuaciones de equilibrio:

$$A t = f \quad (66)$$

$$\Delta t = A^+ f \quad (67)$$

En donde:

t = Distribución arbitraria de fuerzas internas en los elementos de la estructura.

f = Desbalance en las fuerzas internas de todos los elementos que se conectan a cada nodo.

Δt = Distribución de fuerzas internas en la estructura, que equilibran las fuerzas f producidas por el desbalance.

Para empezar con el método se plantea una distribución inicial t_0 de fuerzas internas. Debido a que t_0 no garantiza el auto equilibrio, por ser arbitrario, se calcula f , con la expresión (66).

A continuación, se presenta un resumen realizado por Ochoa y Orellana (2016) del proceso iterativo para la aplicación de este método:

Paso1: Se escoge la distribución inicial $t_0 = t_i - 1$, tomando en cuenta la rigidez unilateral de los elementos y con (66) se determinan las fuerzas f de desbalance en los nodos.

Paso 2: Al calcular f_i , si este es muy pequeño, es decir que según un criterio de convergencia sea muy cercano al vector nulo, puede considerarse que t_i es el modo factible de pre esfuerzo integral. De no ser así se realiza el paso 3.

Paso 3: Al no converger los resultados del paso 2, con f_i se calcula Δt , que corresponde a la distribución de fuerzas internas que equilibran a f , mediante la ecuación (67). Entonces la nueva distribución de fuerzas se calcula $t_i = t_i - 1 - \Delta t$ y se repite el proceso tomando a t_i como la nueva distribución inicial.

Cuando se disponga del modo factible de pre esfuerzo integral, resta la determinación del nivel de pretensado. Para esto se debe considerar que el pre esfuerzo es el que imparte rigidez al sistema y es conveniente que sea de gran magnitud para contralar las deflexiones, pero debe ser el mínimo posible considerando la resistencia de los materiales y métodos constructivos.

2.4.3. Tipos de Tensegridad

Abiertos

Este tipo de Tensegridad necesita elementos adicionales para estabilizarse y ganar rigidez. Estos elementos pueden ser anillos, mástiles, entre otros.

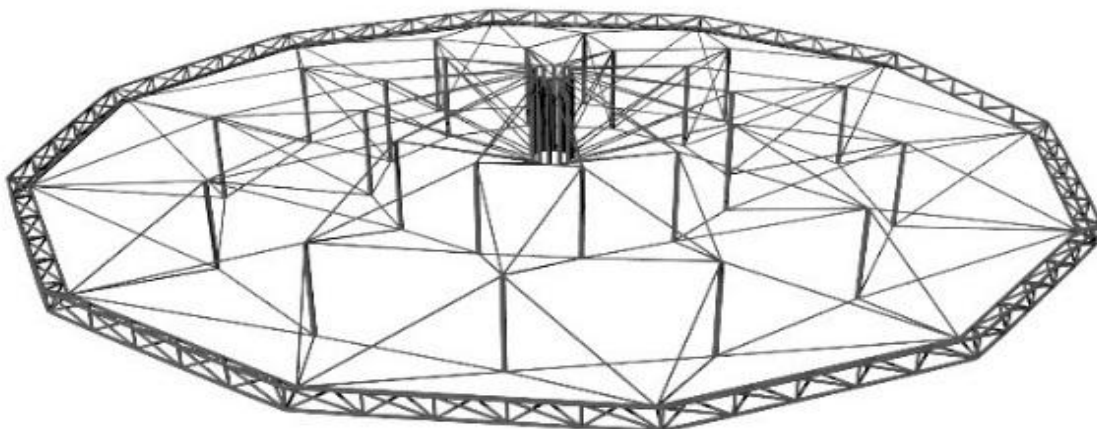


Figura 2.12 Ejemplo de Tensegridad Abierta, ya que requiere del anillo exterior para garantizar la estabilidad (Domo tipo Levy).

Cerrados

Las Tensegridades cerradas no necesitan de elementos externos al sistema para estabilizarse, ni para ganar rigidez, ya que como su definición lo indica, son auto estables y auto tensadas.



Figura 2.13 Ejemplo de Tensegridad Cerrada, (*Tensegrity Tetrahedron*) (Heartney & Snelson, 2013).

2.4.4. Aplicaciones de la Tensegridad

Como se mencionó anteriormente, desde que la Tensegridad se descubrió, su aplicación principal fue en esculturas. Luego de algunos años se llevó el sistema a campos como la ingeniería y arquitectura, con torres, cubiertas y puentes.

Esculturas

Muchas de las esculturas realizadas en Tensegridad fueron las de Kenneth Snelson, que siempre partían del principio de discontinuidad en compresión y continuidad en tracción. La mayoría de investigadores que indagaron en temas de tensegridad, elaboraron esculturas para entender mejor el comportamiento de dicho principio y optimizarlo, En la Figura 2.14 se muestran algunas esculturas que Snelson realizó. Se muestran de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha:

- ***Sleeping Dragon***: construida en 2003 con aluminio y acero inoxidable, tiene 22.1 m de largo.
- ***Spring Street***: fabricada en 1964 con aluminio y acero, es una figura que puede caber dentro de un cubo de 76 cm de lado.
- ***Forest Devil***: elaborada en 1975 con acero inoxidable, sus dimensiones son 87.5 x 173 x 130 cm.

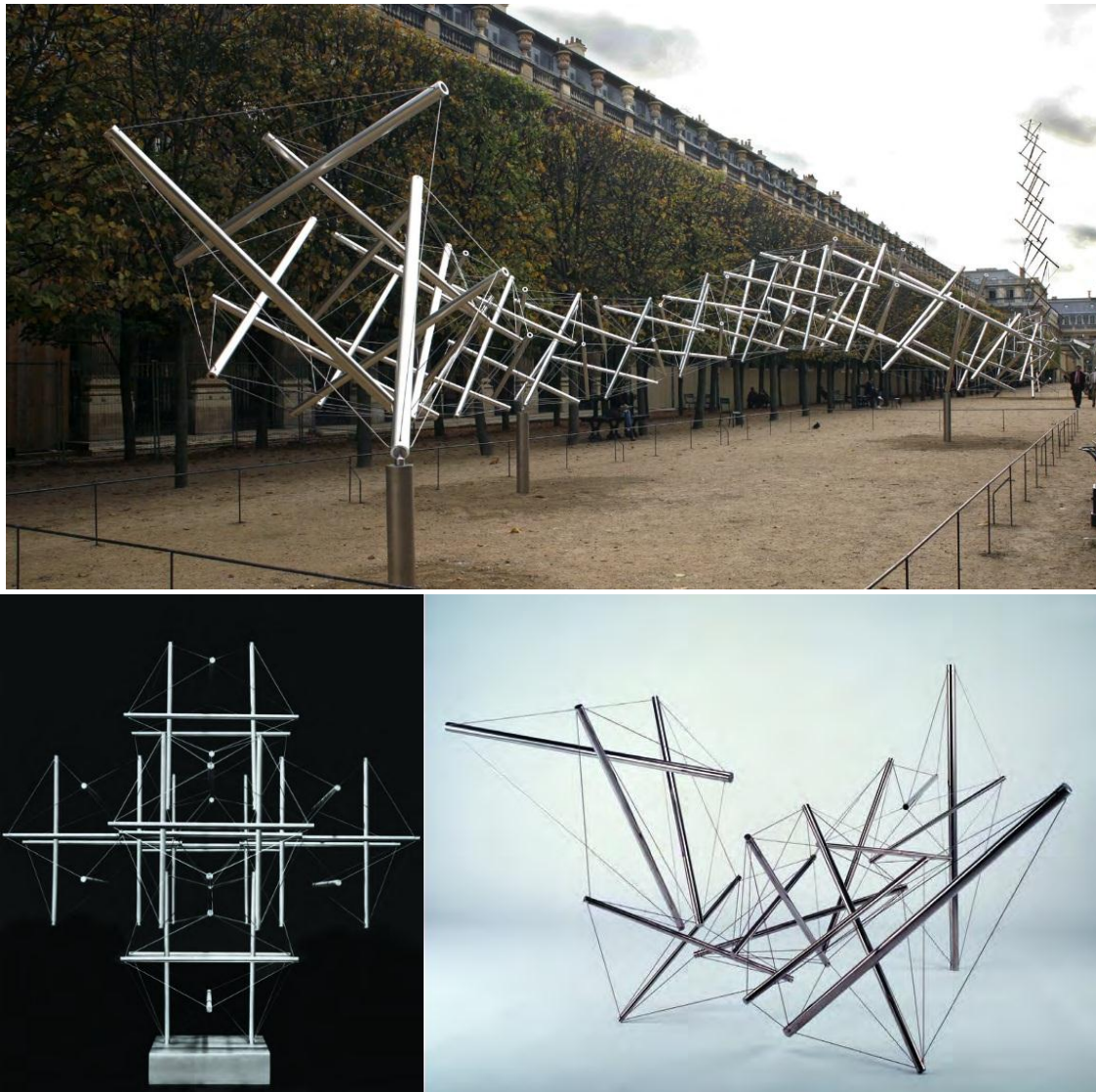


Figura 2.14 Esculturas en tensegridad de Kenneth Snelson (Heartney & Snelson, 2013).

Torres

En este tipo de aplicación no se ha tenido mucho éxito, ya que, para los usos propuestos como torres de energía y antenas de comunicación, existen otros tipos de torres más fáciles de construir. Pero como siempre existe una excepción Snelson diseño y fabricó muchas torres. A continuación, se presentan de izquierda a derecha, tres ejemplos de ellas en la Figura 2.15:

- **Trigonal Tower:** Esta torre se elaboró en el periodo de 1962 a 1963 con aluminio y acero inoxidable. Su altura es de 165.1 cm.
- **Black E.C. Tower:** Construida en 2006, con aluminio y acero inoxidable. Su altura es de 15 m.
- **X-Planar Tower:** Se realizó en el periodo de 1962 a 1988, con aluminio y acero inoxidable. Su altura es de 90 cm.

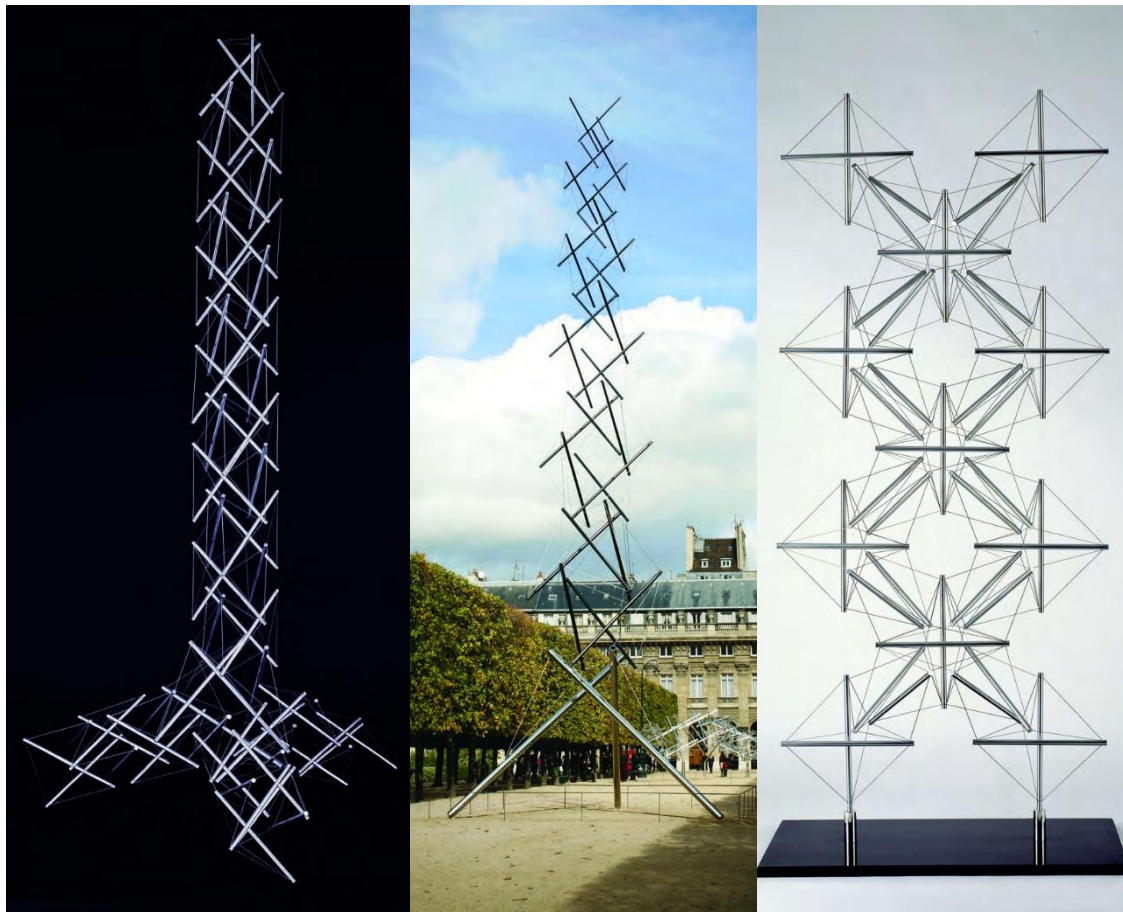


Figura 2.15 Ejemplos de torres tensegríticas (Heartney & Snelson, 2013).

Cubiertas

Para esta aplicación, no existen estructuras de tensegridad pura, ya que requieren de elementos externos para estabilizarse, como los anillos que son usados en los extremos de las cubiertas tipo *Geiger*, *Levy* y *Kiewitt* (Yuan et al., 2007).

Todavía existe una discusión acerca de si son o no consideradas como tensegridades. Pero pueden cubrir grandes luces y son usadas para cubiertas de grandes complejos deportivos. En la Figura 2.16 se presentan ejemplos muy interesantes de cubiertas, de arriba hacia abajo se tiene:

- ***Tropicana Field***: Construida en 1986 en Florida EEUU, se inauguró en 1990. La luz que la cubierta cubre es de 220 m.
- ***Taoyuan Arena***: Se inauguró en 1993 en la ciudad de Taoyuan Taiwán. La luz que cubre la cubierta es de 120 m.
- ***Georgia Dome***: Fue inaugurado el 6 de septiembre de 1992 en Atlanta EEUU, y demolido el 20 de noviembre de 2017.

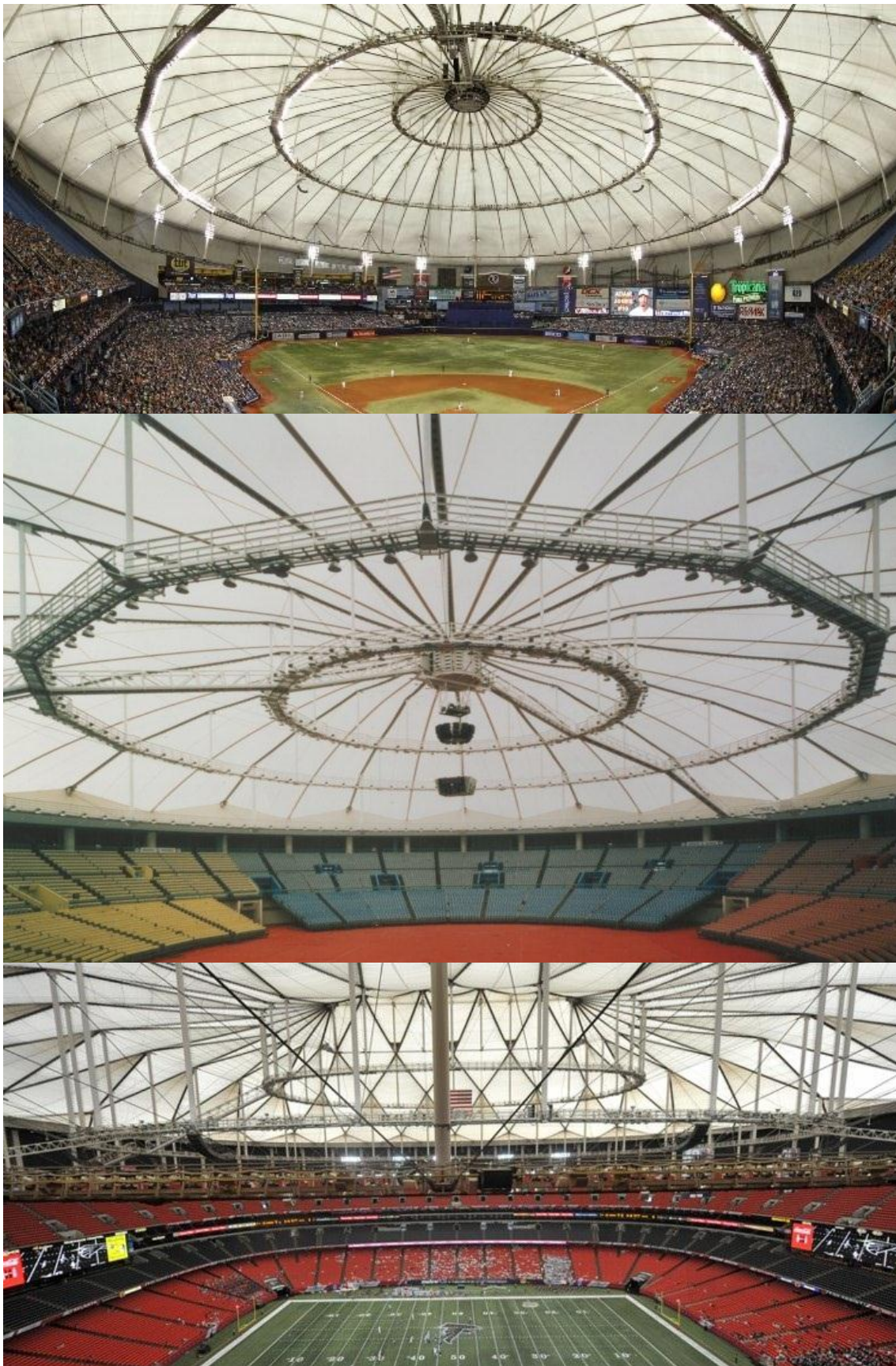


Figura 2.16 Ejemplos de cubiertas tensegríticas (Burzev & Korczynski, 2013).

Puentes peatonales

Existe una gran variedad de formas y diseños de puentes tensegríticos. Y aunque estas estructuras en Tensegridad prometen ser altamente eficientes en la relación entre el material, el rendimiento y el mantenimiento, los críticos de este sistema son escépticos de que sea una morfología de puente más eficiente (tensegritywiki, n.d.).

Un aspecto importante a mencionar, es que las estructuras de tensegridad clásicas están concebidas holísticamente y no son susceptibles de ensancharse a lo largo de un eje (tensegritywiki, n.d.). A continuación, se presentan algunos ejemplos de puentes tensegríticos, de arriba hacia abajo en la Figura 2.17:

- **Kurilpa Bridge:** Como se mencionó anteriormente es el puente peatonal tensegrítico más grande construido, posee una longitud total de 470 m y la luz del vano más grande es igual a 120 m, tiene 6.5 m de ancho y se inauguró en 2009.
- **TorVergata Footbridge:** Diseñado para construirse cerca de la Escuela de Ingeniería de la Universidad de Roma TorVergata. Su longitud total son 32 m y consta de 5 módulos definidos como re expansiones del octaedro tensegrítico clásico.
- **Deployable Bridge Thesis Proposal:** Este puente fue diseñado como parte de una tesis de maestría realizada por Landolf-Rhode Barbarigos. Es una pasarela de 20 m de longitud con 4 módulos (prismas tensegríticos). El puente se puede plegar hacia cada extremo y cada parte se unen en la mitad de la luz.
- **Simplex Module Footbridge Proposal:** Esta propuesta fue realizada por Valentín Gómez Jáuregui, el puente está formado por módulos simplex (prismas tensegríticos de 3 barras), y es ideal para diseños de puentes de pequeñas luces.

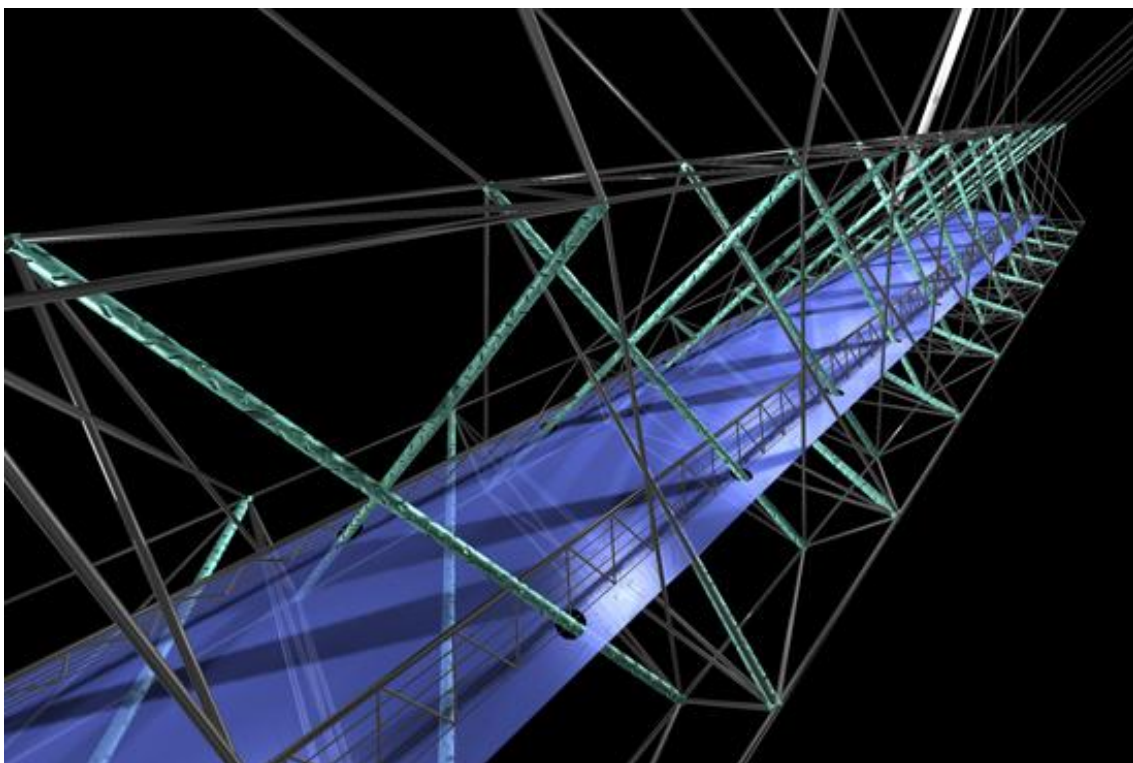
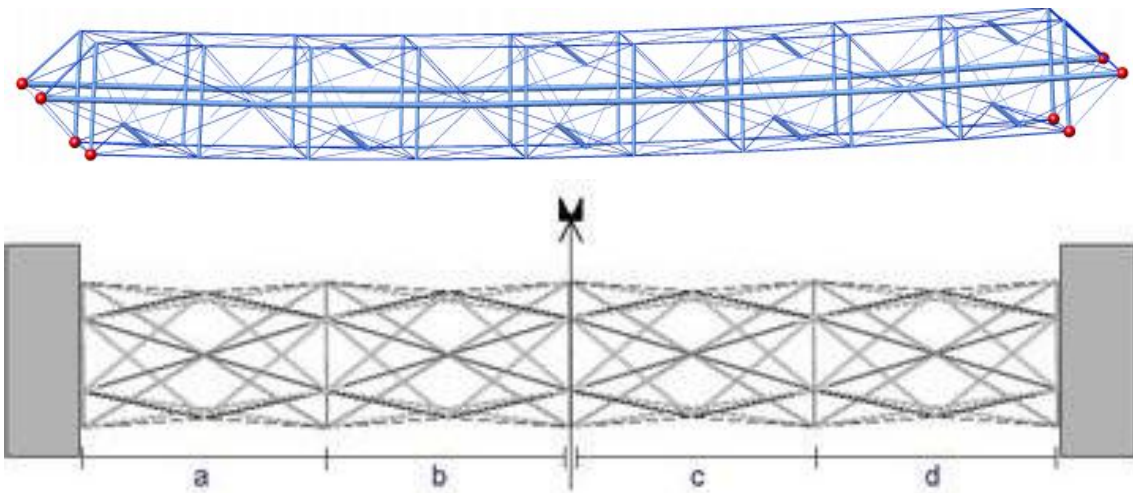


Figura 2.17 Ejemplos de Puentes Tensegríticos (tensegritywiki, n.d.).

3. METODOLOGÍA

La metodología empleada en este trabajo se basa en la investigación sobre tensegridad y los temas relacionados. Gracias a esta búsqueda de información se puede realizar una modelación digital del puente con el software escogido y luego representarlo en un modelo físico.

3.1. Software

El software utilizado en el presente trabajo se describe brevemente a continuación:

Autodesk AutoCAD

AutoCAD es un software de diseño asistido por computadora utilizado para dibujo 2D y modelado 3D (Ferrer, n.d.). Este programa se usó en el presente trabajo para modelar la geometría de los módulos tensegríticos y los posibles diseños del puente.

MATLAB

MATLAB es un programa que ofrece gran facilidad para trabajar con matrices y un lenguaje de programación propio (lenguaje M) (MATLAB, n.d.). En el presente trabajo se usaron las herramientas de MATLAB para determinar la distribución del pre esfuerzo de los elementos del puente.

SAP2000

SAP2000 es un programa de elementos finitos de la familia CSI (*Computer and Structures, INC*), orientado a resolver problemas de ingeniería de estructuras (CSI Spain, n.d.). Al ser una herramienta muy potente, esta se usó para el diseño de la estructura del puente.

3.2. Búsqueda de Forma mediante Modelos Digitales y Físicos sencillos

Luego de haber realizado una revisión bibliográfica de los modelos existentes, partiendo desde los más sencillos para comprender mejor el sistema, se procedió a realizar modelos digitales para después representarlos físicamente. En la Figura 3.1 se puede apreciar uno de los modelos más sencillos de tensegridad, un prisma de 4 barras y 12 cables.

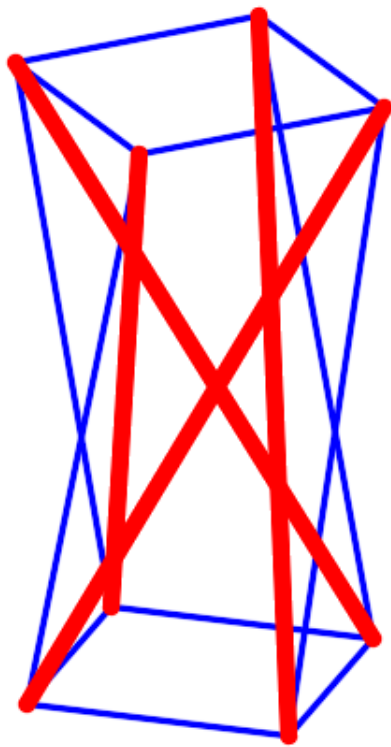


Figura 3.1 Prisma Tensegrítico de 4 barras y 12 cables (modelo realizado por el autor).

Al unir varios módulos simples de 3 barras y 9 cables, se obtiene uno de mayor complejidad como el que se muestra en la Figura 3.2.

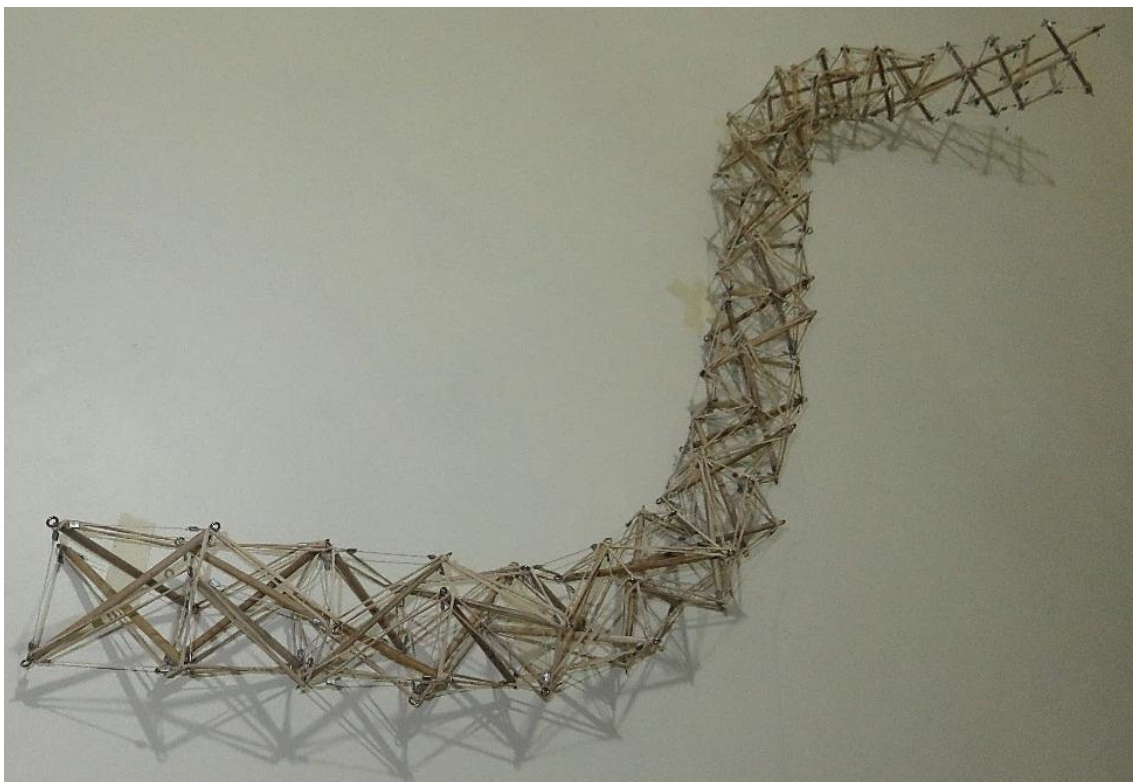


Figura 3.2 Unión de Prismas Tensegríticos simples (modelo realizado por el autor).

También se probaron otros tipos de módulos como los mostrados a continuación:

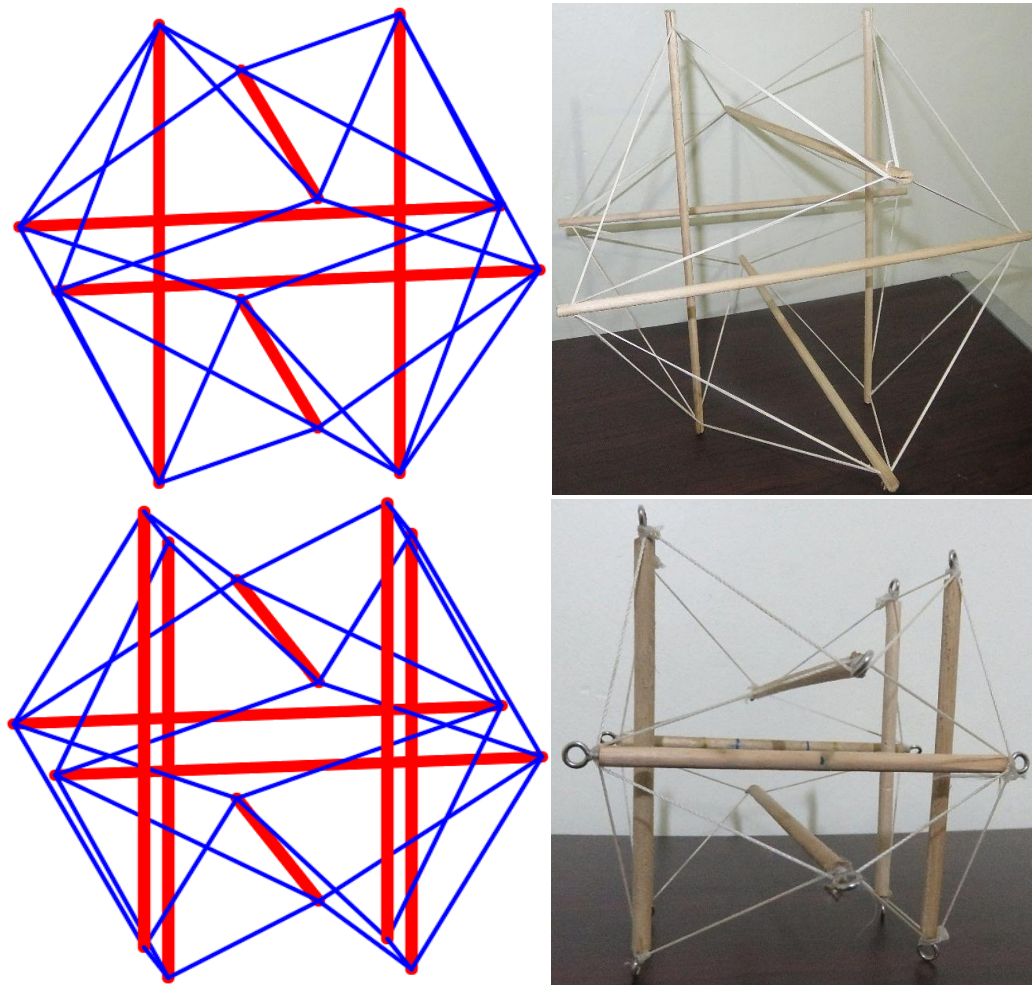


Figura 3.3 Arriba: Módulo de 6 barras y 24 cables. Abajo: Módulo de 8 barras y 28 cables (modelos realizados por el autor).

3.3. Propuesta de Diseño para el Puente

Luego de la experimentación con los distintos módulos tensegríticos, se obtuvo una forma para el puente peatonal. A continuación, se describe el proceso para obtener la geometría y el modo factible de pre esfuerzo integral.

3.3.1. Forma Geométrica del Puente

Los trabajos propuestos por (Burzev & Korczynski, 2013) y la unión de módulos como los mostrados en la Figura 3.3, permitieron proponer una configuración geométrica adecuada para el puente. Dentro de la búsqueda de forma se

configuró varias geometrías como propuestas para el puente. Esto llevó a unir hasta veinte módulos, pero estas configuraciones requirieron de niveles de pretensados superiores a los que pueden alcanzar las secciones existentes en el mercado. Además, se producían deformaciones excesivas, que evitaban cumplir con el límite de $l/1000 = 30 \text{ mm}$, recomendado por la normativa (AASHTO LRFD, 2014).

Como solución al problema anteriormente expuesto, se optó por unir únicamente dos módulos del estilo de la Figura 3.3, modificando su geometría para obtener un modo factible de pre esfuerzo integral adecuado a las capacidades existentes. Con esto se consiguió el modelo de la Figura 3.4, con las siguientes características:

- Luz libre de 30 m.
- Once barras sujetas a compresión.
- Cuarenta y cuatro cables sujetos a tensión.
- Veinte nodos libres.
- Longitud del elemento comprimido más grande igual a 15 m
- Longitud del elemento comprimido más pequeño igual a 6 m.
- Longitud del elemento traccionado más grande igual a 10.50 m.
- Longitud del elemento traccionado más pequeño igual a 5.20 m.

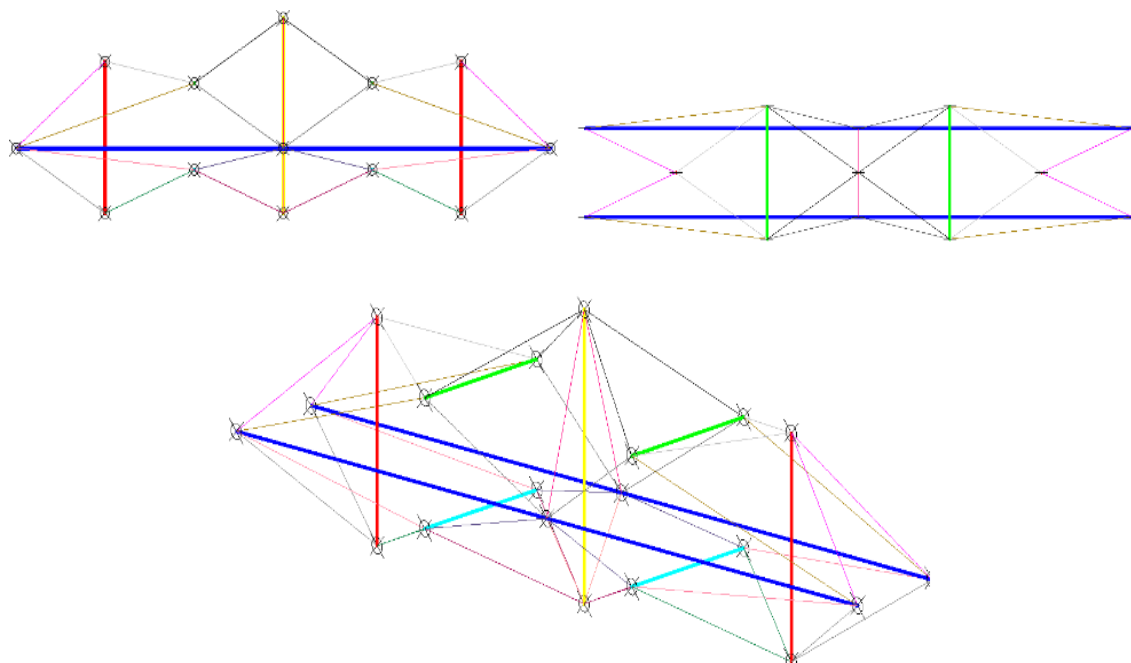


Figura 3.4 Puente Tensegrítico resultado de la unión de dos módulos como los de la Figura 3.3. Se representa con distinto color los Grupos de simetría existentes.

3.3.2. Modelo Digital del Puente

Como se mencionó anteriormente, se realizaron varios modelos uniendo módulos, sin embargo, el que se escogió por cuestiones de resistencia y para cumplir con la normativa se presenta en la siguiente figura:

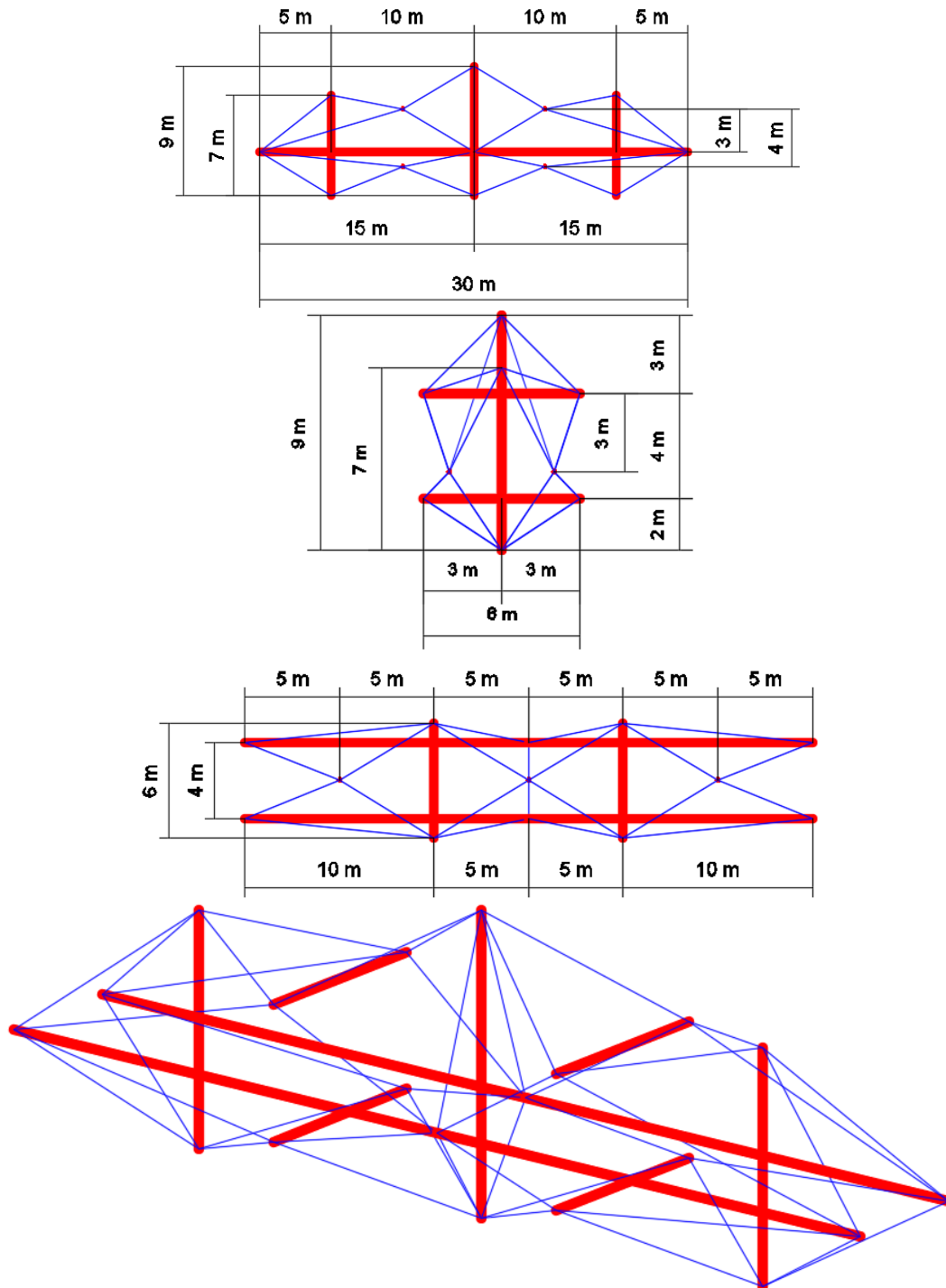


Figura 3.5 Propuesta Geométrica para el Puente Peatonal generada en AutoCAD. De arriba hacia abajo las vistas correspondientes son: Frontal, Derecha, Superior y Perspectiva en 3D. Los elementos de color rojo corresponden a las barras y los de color azul son cables.

A continuación, se pueden apreciar los grupos de simetría presentes en el puente peatonal propuesto:

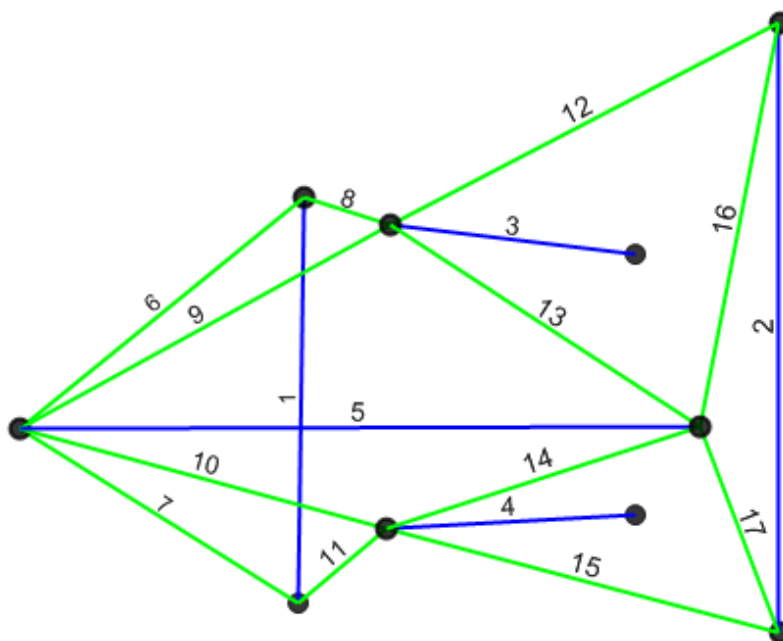


Figura 3.6 Grupos de Simetría que posee el puente propuesto. Imagen extraída del modelo realizado en SAP2000.

Los valores tabulados en la siguiente tabla, corresponden a la longitud y el tipo de elemento de cada grupo de simetría presentado en la Figura 3.6.

Tabla 3.1 Longitud y Tipo de elemento de los Grupos de Simetría presentes en el Puente.

Grupo de Simetría	Longitud (m)	Tipo de elemento
1	7.00	Barra
2	9.00	Barra
3	6.00	Barra
4	6.00	Barra
5	15.00	Barra
6	6.71	Cable
7	6.16	Cable
8	5.92	Cable
9	10.49	Cable
10	10.16	Cable
11	6.02	Cable
12	6.56	Cable
13	5.92	Cable
14	5.32	Cable
15	6.02	Cable
16	6.32	Cable
17	3.61	Cable

3.3.3. Búsqueda del Pre esfuerzo

Con una geometría definida, se procede a la determinación del modo factible de pre esfuerzo integral mediante la DSVD (Doble Descomposición en Valores Singulares) que se describió en el apartado 2.4.2.

Para realizar este análisis, se tomó como base el código de MATLAB desarrollado por Ochoa y Orellana (2016), para encontrar el pre esfuerzo y se realizaron pequeñas modificaciones en la parte del ensamblaje de la matriz de equilibrio **A**. Este código es un conjunto de funciones que permiten ingresar los datos mediante una hoja de Excel, en donde constan matrices de coordenadas, conectividad y nodos libres.

Luego de leer los datos ingresados, el código ensambla la matriz de compatibilidad **C** con las matrices dato antes mencionadas, y la transpone para obtener la matriz de equilibrio **A**. Mediante la función de MATLAB `svd()` se obtienen los modos de pre esfuerzo independiente e integral como se describe en la sección 2.4.2.

Se presentan resultados numéricos de los valores de pre esfuerzo de manera relativa, esto se consigue normalizando el vector con respecto al valor más grande. También se presentan resultados gráficos mediante la función programada por Ochoa y Orellana (2016).

Para la validación del código, se usaron ejemplos de la literatura, a continuación, se presentan algunos de ellos:

Prisma Tensegrítico

En este ejemplo las bases del prisma son cuadradas y no poseen las mismas dimensiones, siendo la base inferior la de mayor lado. El prisma posee 4 barras y 12 cables. La geometría sugiere 4 grupos de simetría. Los valores de los coeficientes de pre esfuerzo son:

$$\begin{bmatrix} \text{Cables de base inferior} \\ \text{Cables diagonales entre bases} \\ \text{Cables de base superior} \\ \text{Barras} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_o \\ t_v \\ t_h \\ t_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 2.236 \\ 1.414 \\ -3.000 \end{bmatrix}$$

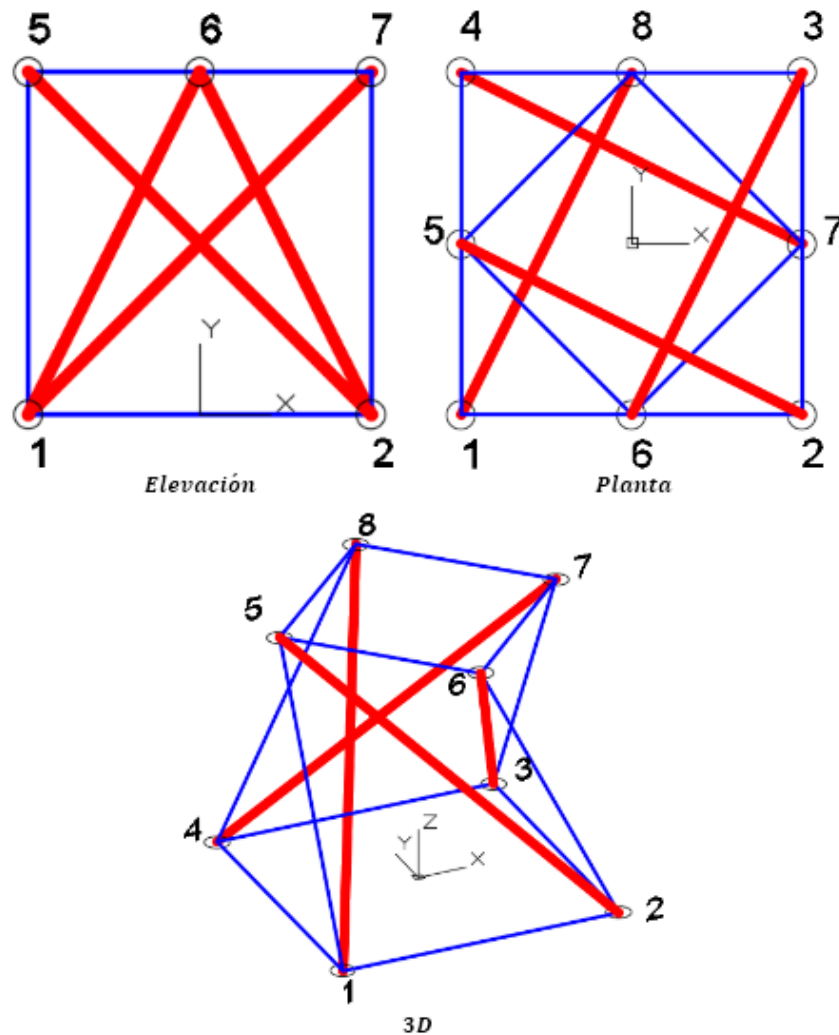


Figura 3.7 Estructura Tensegrítica modelada en AutoCAD, usada para la validación del algoritmo de MATLAB. Las coordenadas de los nodos se muestran en la Tabla 3.2.

Los datos ingresados en el algoritmo de MATLAB se presentan en la Tabla 3.2 en la cual, constan las coordenadas de los nodos que forman el prisma, y en la Tabla 3.3 que es la matriz de conectividad donde en la primera columna se encuentran los elementos, en la segunda el nodo inicial del elemento, en la tercera el nodo final del elemento y en la cuarta el grupo de simetría de cada elemento.

Tabla 3.2 Coordenadas de la Figura.

Nodo	X(m)	Y(m)	Z(m)
1	-3	-3	0
2	3	-3	0
3	3	3	0
4	-3	3	0
5	-3	0	6
6	0	-3	6
7	3	0	6
8	0	3	6

Tabla 3.3 Conectividad de los elementos del Prisma Tensegrítico.

Elemento	Nodo Inicial	Nodo Final	Grupo de Simetría
1	1	2	t_o
2	2	3	t_o
3	3	4	t_o
4	4	1	t_o
5	2	6	t_v
6	3	7	t_v
7	4	8	t_v
8	1	5	t_v
9	6	7	t_h
10	7	8	t_h
11	8	5	t_h
12	5	6	t_h
13	2	5	t_b
14	3	6	t_b
15	4	7	t_b
16	1	8	t_b

A continuación, en la Figura 3.8 se muestra el resultado gráfico del análisis realizado en MATLAB. Se puede apreciar que los elementos a compresión son los de color rojo, mientras que los que están sometidos a tracción se presentan de color azul:

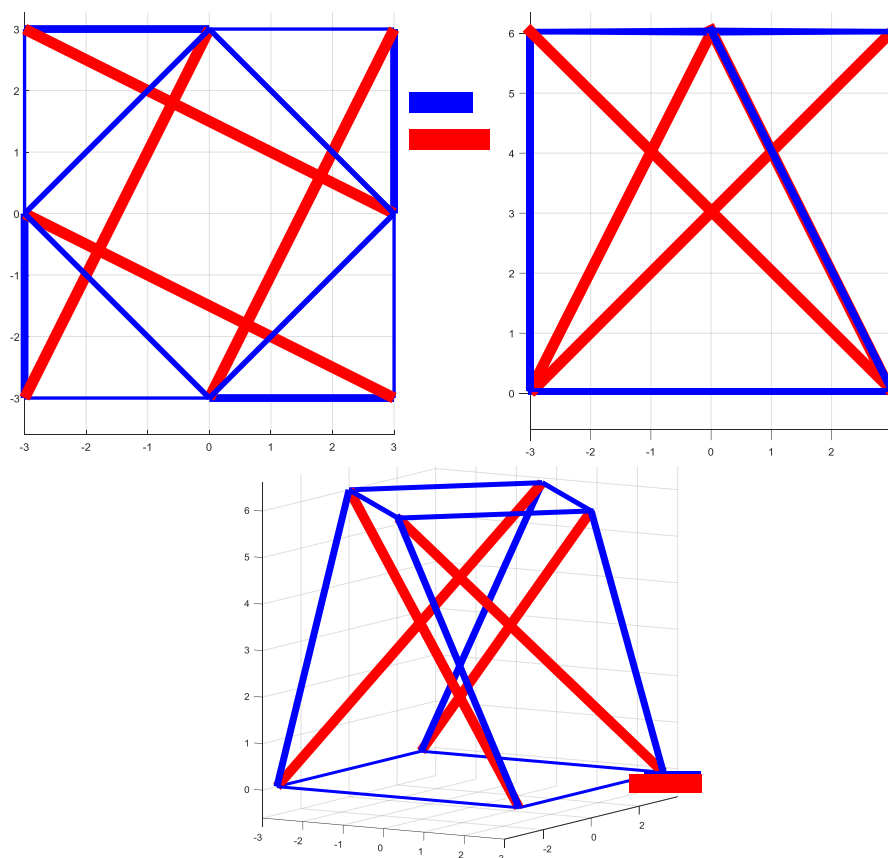


Figura 3.8 Distribución del pre esfuerzo del Prisma Tensegrítico. Respuesta gráfica del algoritmo de MATLAB. De arriba hacia abajo: vista en planta, elevación y perspectiva 3D.

Los valores numéricos de la distribución relativa del pre esfuerzo son:

Tabla 3.4 Valores de pre esfuerzo, resultado obtenido en MATLAB.

Elemento	W
t_o	1.000
t_v	2.236
t_h	1.414
t_b	-3.000

Los resultados obtenidos con el código de MATLAB son los mismos que los presentados en la bibliografía, por lo tanto, validan el algoritmo para estructuras tensegríticas cerradas, es decir, aquellas que no necesitan de elementos externos para lograr el equilibrio. A continuación, se prueba el algoritmo para estructuras tensegríticas abiertas, con cubiertas y domos de la bibliografía.

Cubierta propuesta por Ochoa y Orellana (2016)

La siguiente comprobación se la realizó con el prototipo propuesto en la tesis de Ochoa y Orellana (2016). La estructura consta de 169 elementos de los cuales 37 son barras y 132 son cables. Según la geometría los elementos se pueden dividir en 15 grupos de simetría desde el grupo A hasta O, como se muestra en la Figura 3.9:

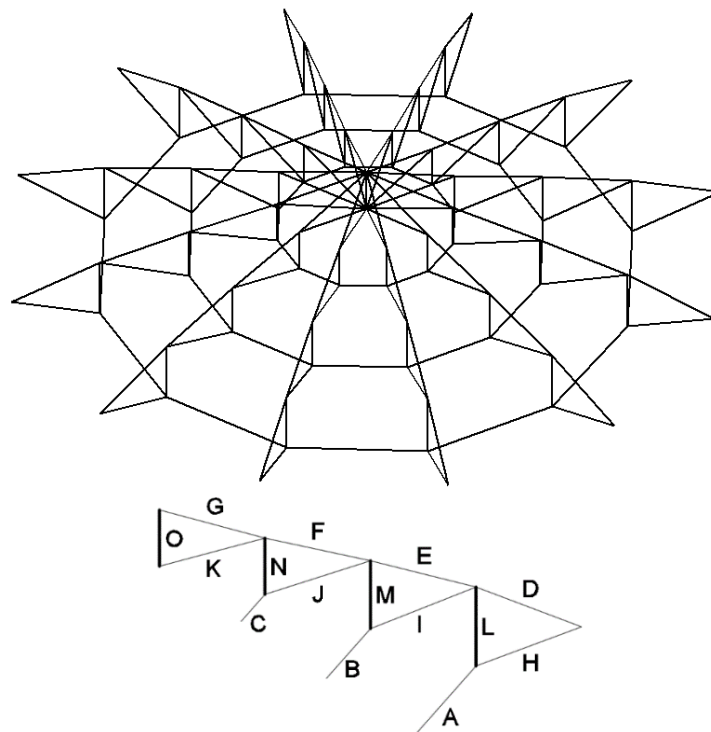


Figura 3.9 Estructura de cubierta propuesta con sus grupos de simetría (Ochoa & Orellana, 2016).

La distribución del pre esfuerzo que se obtiene de manera gráfica en MATLAB, se presenta en la Figura 3.10

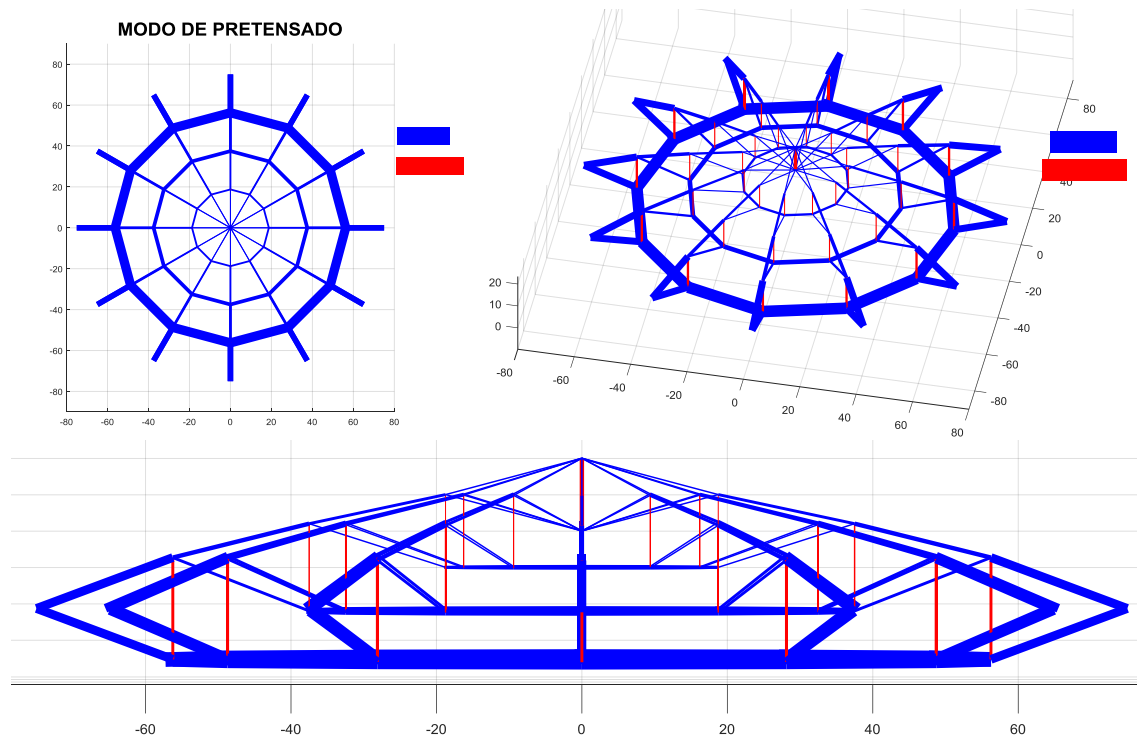


Figura 3.10 Distribución del pre esfuerzo en la cubierta propuesta por (Ochoa & Orellana, 2016). Respuesta gráfica del algoritmo de MATLAB. De arriba hacia abajo: vista en planta, perspectiva del domo y elevación.

Los coeficientes de la distribución de pre esfuerzo obtenidos en MATLAB, se presentan en la Tabla 3.5:

Tabla 3.5 Distribución relativa del pre esfuerzo para cubierta propuesta por (Ochoa & Orellana, 2016), resultado obtenido en MATLAB.

Elemento	W
A	1.000
B	0.388
C	0.245
D	0.553
E	0.326
F	0.194
G	0.098
H	0.553
I	0.216
J	0.133
K	0.098
L	-0.193
M	-0.079
N	-0.041
O	-0.304

Los resultados de este análisis, demuestran que el código también es válido para analizar estructuras tensegríticas abiertas. Como validación final, se realiza el análisis del ejemplo propuesto en la bibliografía del método DSVD:

Geiger Dome

(Yuan et al., 2007) plantea como ejemplo el siguiente *Geiger Dome*, que posee 156 elementos de los cuales 36 son barras y 120 son cables. Tiene 84 nodos en total y 72 de ellos son nodos libres. De acuerdo a la geometría los elementos se pueden dividir en 13 grupos de simetría:

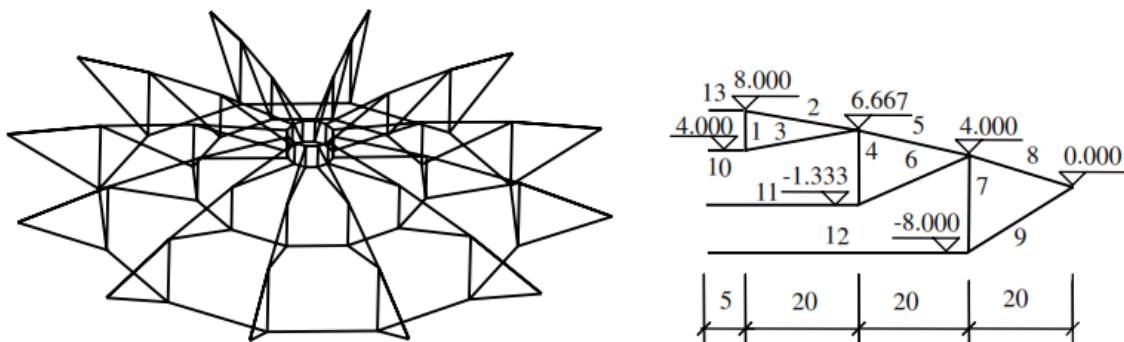


Figura 3.11 Vista en perspectiva y elevación de un domo Geiger (Yuan et al., 2007).

Los resultados gráficos generados con el algoritmo de MATLAB se muestran en la Figura 3.12.

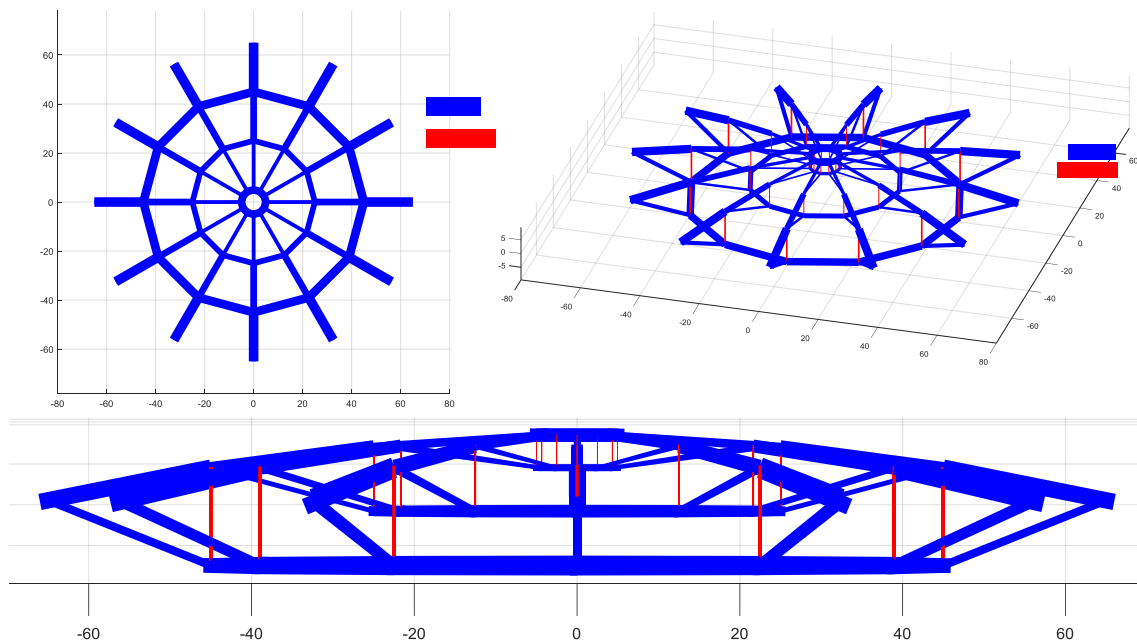


Figura 3.12 Distribución del pre esfuerzo en Domo Geiger propuesto por (Yuan et al., 2007). Respuesta gráfica del algoritmo de MATLAB. De arriba hacia abajo: vista en planta, perspectiva del domo y elevación.

Para realizar la comparación se presentan en la Figura 3.13 los resultados que (Yuan et al., 2007) obtiene para el Geiger Dome y en la Tabla 3.6 los resultados del análisis realizado con el código de MATLAB.

Single integral prestress mode of a Geiger dome

	Group no.						
	1	2	3	4	5	6	7
Prestress	-0.03	0.44	0.22	-0.09	0.66	0.34	-0.20
	8	9	10	11	12	13	
Prestress	1.0	0.5281	0.42	0.63	0.95	0.84	

Figura 3.13 Resultado de los modos de pre esfuerzo que presenta (Yuan et al., 2007).

Tabla 3.6 Modo Factible de Pre esfuerzo integral para Geiger dome, resultado obtenido en MATLAB.

Elemento	W
1	-0.029
2	0.437
3	0.220
4	-0.087
5	0.660
6	0.338
7	-0.196
8	1.000
9	0.528
10	0.421
11	0.632
12	0.947
13	0.842

Se puede apreciar que el elemento con mayor coeficiente de pre esfuerzo es el correspondiente al grupo de simetría 8, es decir, los cables que se encuentran en el anillo exterior, mientras que, el menos cargado corresponde al grupo de simetría 1, que son las barras que unen los dos anillos internos de cables.

Los resultados obtenidos con el código de MATLAB, concuerdan en todos los casos con los valores que presenta la bibliografía, por lo tanto, se concluye que el programa es válido y servirá para determinar el Modo Factible de Pre esfuerzo Integral para el puente propuesto en este estudio.

Puente Peatonal de Dos Módulos

El puente sujeto a estudio en el presente trabajo, está compuesto por 55 elementos, de los cuales 11 son barras y 44 cables, además, tiene un total de 20 nodos libres y cubre posee una luz libre de 30 m.

A continuación, se presentan los resultados gráficos obtenidos en MATLAB para el puente considerado en el presente trabajo:

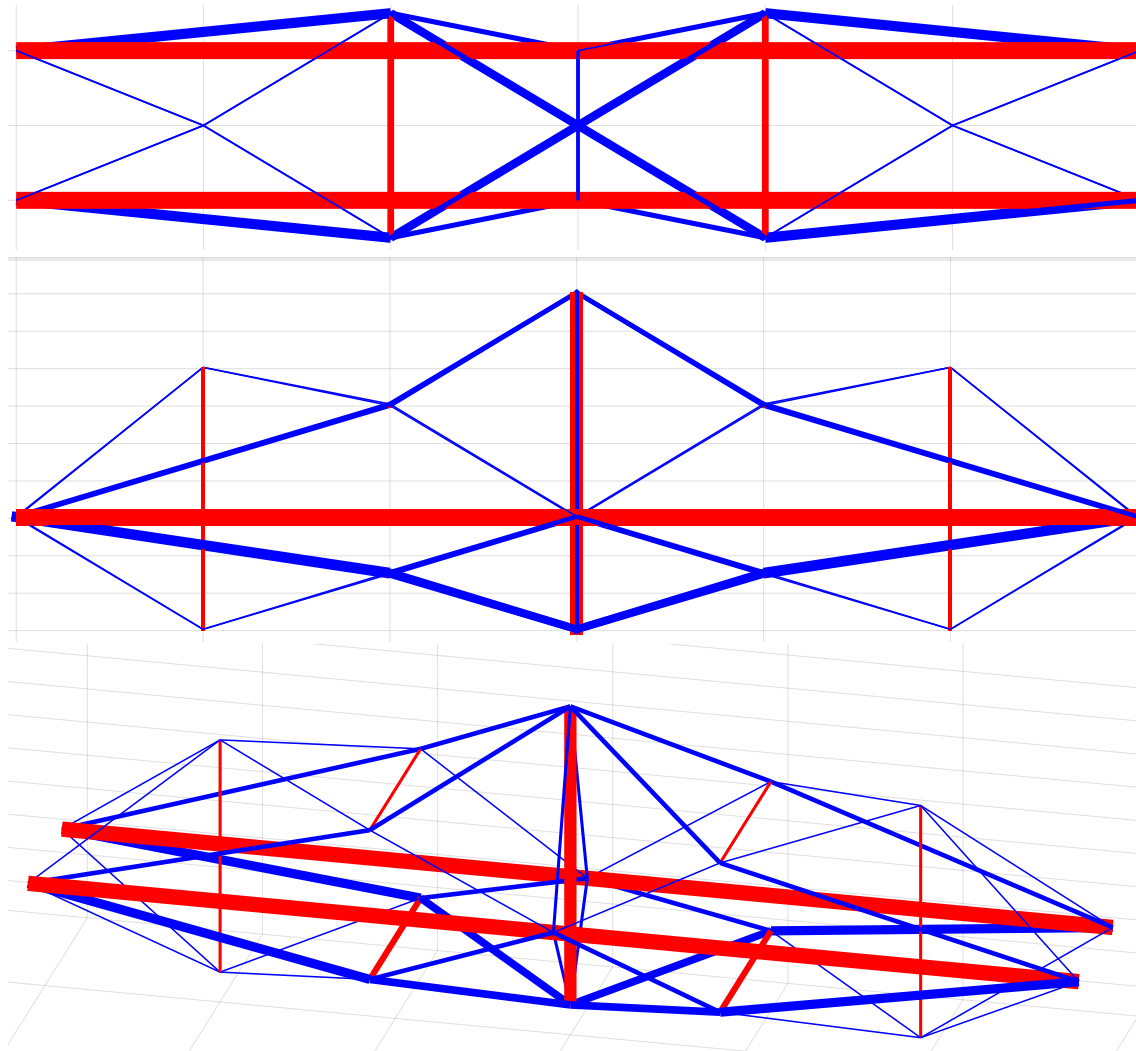


Figura 3.14 Distribución del pre esfuerzo en Puente Tensegrítico. Respuesta gráfica del algoritmo de MATLAB. De arriba hacia abajo: vista en planta, elevación y perspectiva en 3D.

La distribución relativa del pre esfuerzo para el puente, se presenta en la siguiente tabla, en donde se puede observar que el elemento más esforzado es el que pertenece al grupo de simetría 5, y a su vez es el elemento más largo. Por otro lado, el elemento menos cargado corresponde al cable del grupo de simetría

Tabla 3.7 Distribución Relativa del pre esfuerzo para el Puente Tensegrítico, obtenido en MATLAB.

Grupo de Simetría	W
1	-0.190
2	-0.800
3	-0.232
4	-0.421
5	-1.000
6	0.127
7	0.130
8	0.112
9	0.250
10	0.571
11	0.127
12	0.276
13	0.145
14	0.261
15	0.507
16	0.155
17	0.177

3.4. Modelos Físicos

En esta sección se detalla la manera en que se realizaron los modelos físicos de los módulos simples y luego como fue el proceso de fabricación del modelo a escala del puente.

3.3.4. Modelos Físicos de Prismas y Módulos Simples de Tensegridad

Para la fabricación de los modelos físicos de los prismas y módulos simples, no fueron necesarios muchos materiales.

Cabe recalcar que la experimentación al construir modelos sencillos, aportó mucha experiencia, y cada vez que se realizaba un modelo nuevo, el proceso se volvía más sencillo.

Materiales:

- Cáncamos de acero inoxidable para modelar las uniones entre barras y cables.
- Barras de Madera de sección circular para modelar las barras.
- Hilo Nylon y bandas de Goma para modelar los cables.



Figura 3.15 Materiales para la construcción de los modelos simples.

En la Figura 3.16 (de izquierda a derecha) se pueden apreciar tres prismas tensegríticos de 3, 6 y 4 barras. Todos ellos pertenecen al tipo de tensegridades cerradas, debido a que no necesitan de elementos externos para estabilizarse.



Figura 3.16 Prismas tensegríticos de 3, 6 y 4 barras (modelos realizados por el autor).

También se experimentó uniendo varios módulos de 3 barras y obteniendo como resultado el modelo presentado en la Figura 3.17:

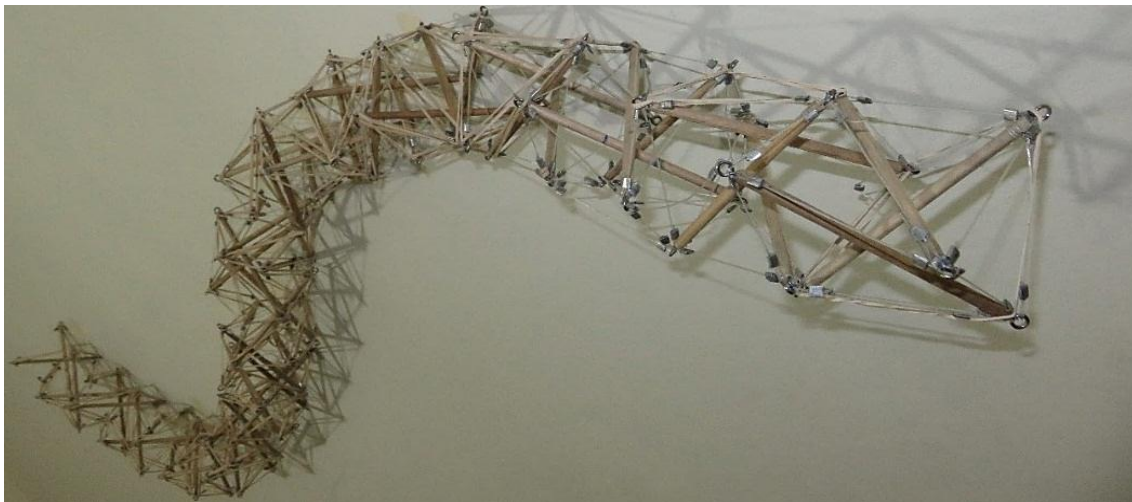


Figura 3.17 Modelo resultado de unir prismas tensegríticos de 3 barras (modelo realizado por el autor).

3.3.5. Modelo Físico del Puente Tensegrítico

A continuación, se describe como se realizó el modelo a escala del Puente Tensegrítico. Con este modelo se pretende recrear el proceso constructivo y evidenciar las dificultades que se pueden presentar cuando se realiza conexiones y se aplica el pre tensado de cables. Para la modelación física del puente se ha escogido la escala de 1:25, las dimensiones de los elementos en esta escala se presentan en la Tabla 3.8.

Tabla 3.8 Longitud de elementos en escala real y 1:25.

Grupo de Simetría	Longitud Real (m)	Longitud a Escala 1:25 (cm)
1	7.00	28.0
2	9.00	36.0
3	6.00	24.0
4	6.00	24.0
5	15.00	60.0
6	6.71	26.8
7	6.16	24.7
8	5.92	23.7
9	10.49	42.0
10	10.16	40.6
11	6.02	24.1
12	6.56	26.2
13	5.92	23.7
14	5.32	21.3
15	6.02	24.1
16	6.32	25.3
17	3.61	14.4

Materiales:

- Cable circular de acero de 1.6 mm (1/16 pulg) de diámetro.
- Tubos circulares de acero de 25.4 mm (1 pulg) de diámetro
- Tubos circulares de acero de 15.9 mm (5/8 pulg) de diámetro
- Tubos circulares de acero de 12.7 mm (1/2 pulg) de diámetro
- Terminales eléctricos de cobre.
- Tuercas de 4.8 mm (3/16 pulg).
- Arandelas con diámetros exteriores similares a los tubos de acero, es decir: 1 pulg, 5/8 pulg y 1/2 pulg.
- Tensores pequeños.
- Plywood para el armado del cajón que sostuvo los tubos durante el ensamblaje del puente.

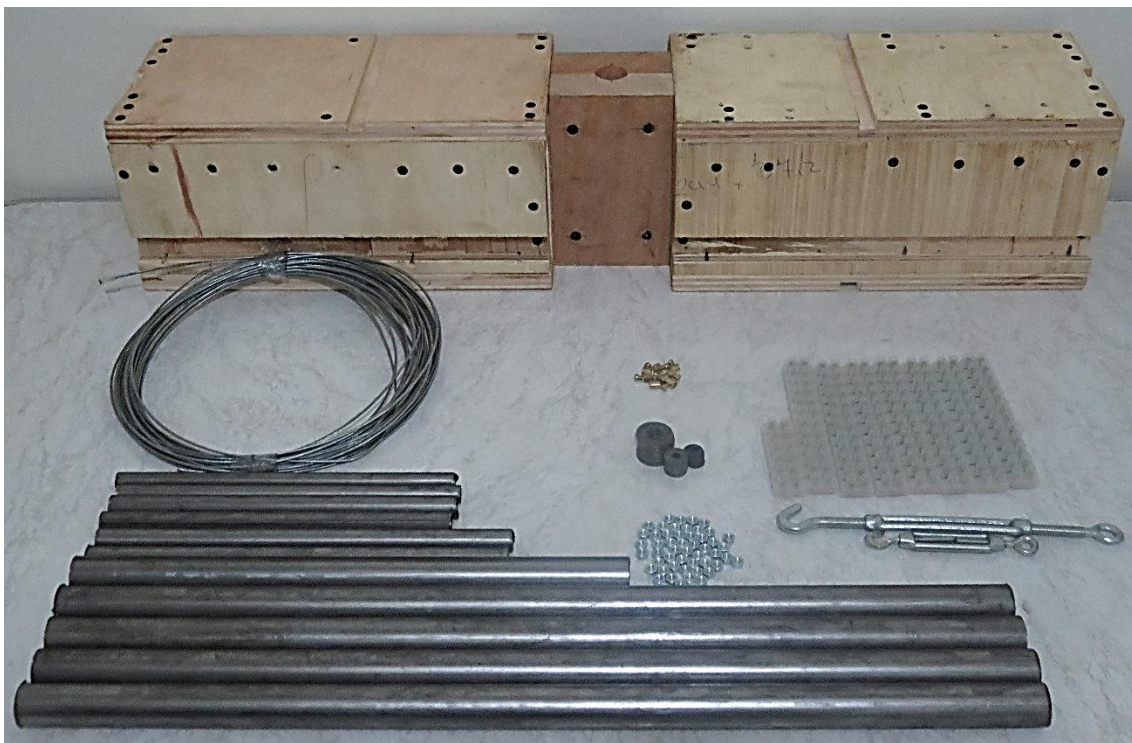


Figura 3.18 Materiales para la construcción del modelo a escala del Puente.

Proceso del Ensamblaje:

Como primer paso se deben preparar los tubos para poder realizar las conexiones con los cables. Debido a que las tensiones en los cables pueden deformar los tubos en sus extremos, se soldó una arandela en cada extremo, como se muestra en la Figura 3.19.

Nota: Se usó soldadura autógena de plata para unir los elementos de acero mencionados.



Figura 3.19 Tubos de acero reforzados con arandelas soldadas en los extremos de los mismos.

Una vez reforzados los tubos con las arandelas, se soldaron tuercas en los extremos de los tubos para conectarlos con los cables. En la Figura 3.20 se puede apreciar cómo se soldaron las tuercas y cuál fue el resultado final.



Figura 3.20 Soldadura de tuerca en tubo de acero.

Para asegurar la ubicación de los tubos de acero durante el ensamblaje, se construyó un cajón con planchas de plywood de 18 mm de espesor. Se calaron agujeros en el cajón para encajar los tubos y estos se aseguraron con alambre de amarre y tornillos, como se muestra en la Figura 3.21:

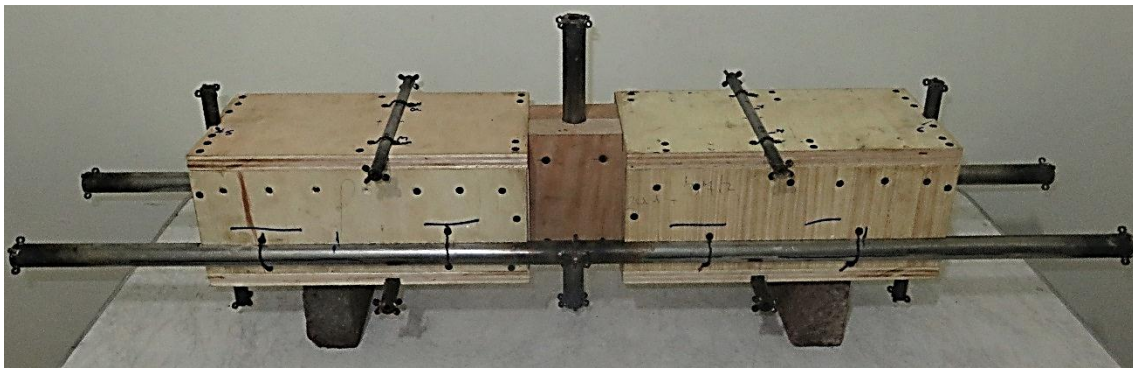


Figura 3.21 Cajón de plywood que aseguró la ubicación de los elementos a compresión durante la colocación de los cables.

Se ensamblaron los cables, de manera que las fuerzas de pre esfuerzo fueran determinadas experimentalmente, es decir que se iba controlando la geometría del modelo a medida que se le daba más fuerza a los cables por medio de los tensores (Figura 3.22).



Figura 3.22 Cables colocados y tensados por medio de los tensores.

Con el modelo ensamblado, se procedió a destruir el cajón de madera para retirarlo de la estructura (Figura 3.23), ya que como se mencionó anteriormente este solo sirvió para mantener en su posición a los elementos sometidos a compresión durante el ensamblaje.

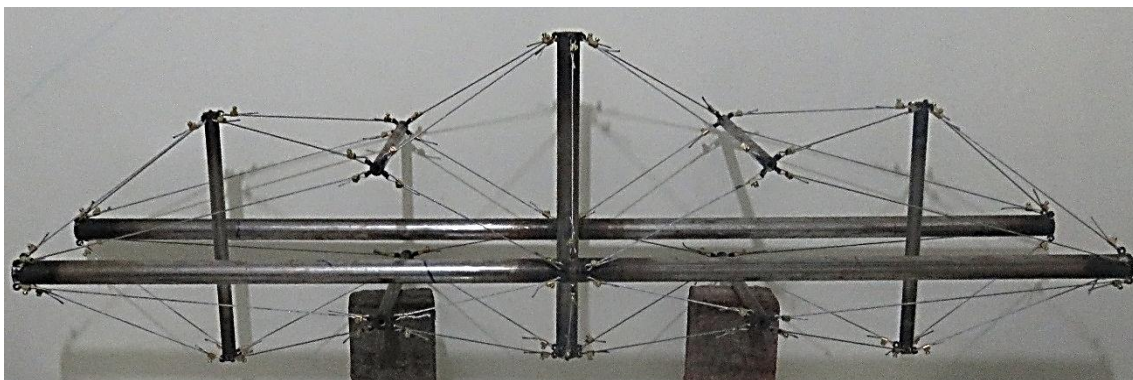


Figura 3.23 Modelo a escala del puente sin el cajón de madera.

Por último, se lijó y pintó el puente, obteniendo como resultado el modelo presentado en la Figura 3.24:

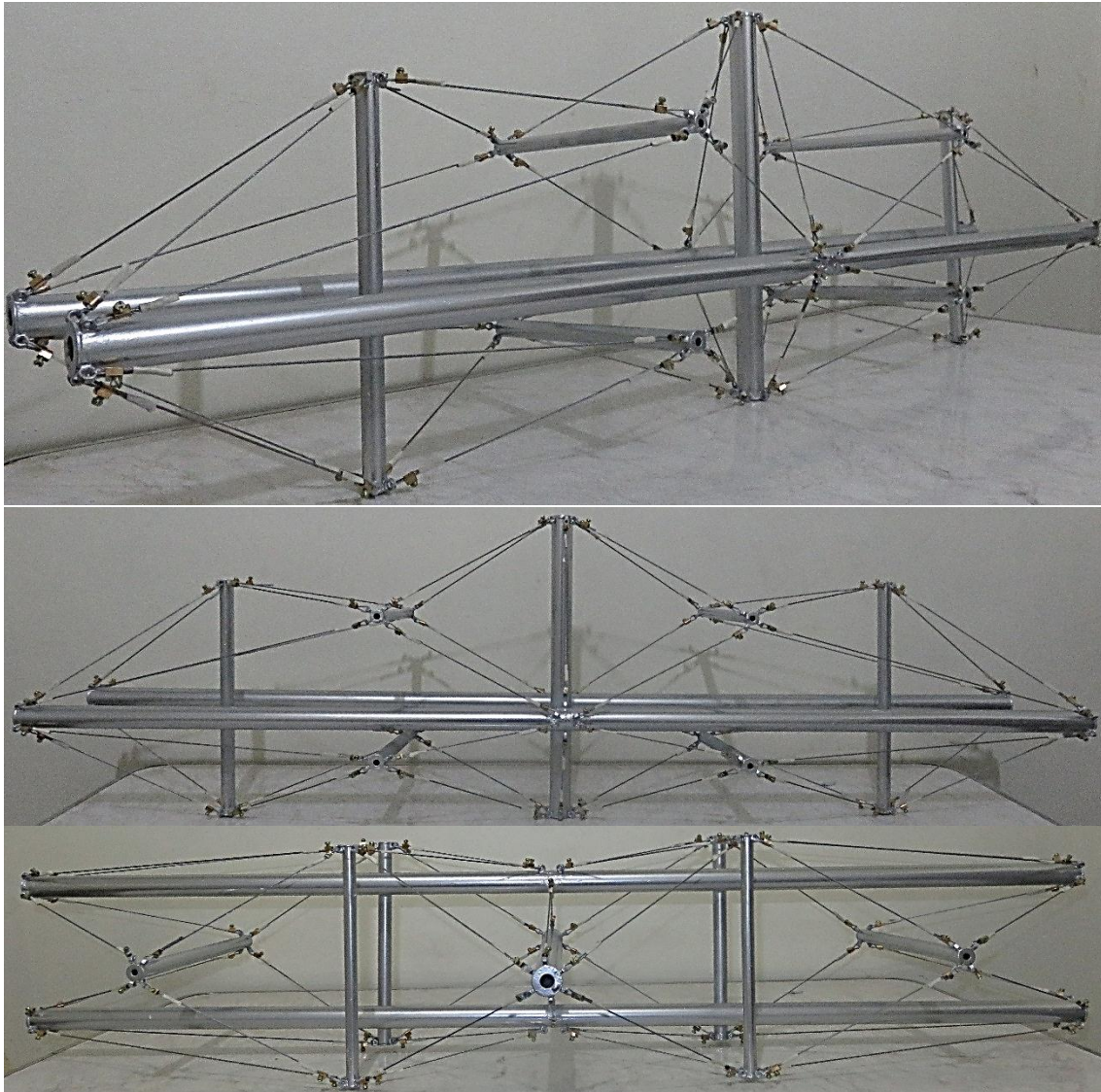


Figura 3.24 Modelo a escala del Puente terminado.

4. DISEÑO

4.1. Sistema Estructural

El puente soporta un tablero metálico por la cual circularán los peatones y bicicletas. Este tablero consta de vigas (perfiles W) y planchas de acero de 16 mm. Las vigas se apoyan en los extremos de las barras del grupo de simetría 5 (ver Figura 3.6), esto se realiza para lograr que en la estructura tensegrítica existan únicamente cargas axiales. A continuación, se presenta la configuración descrita para el tablero:

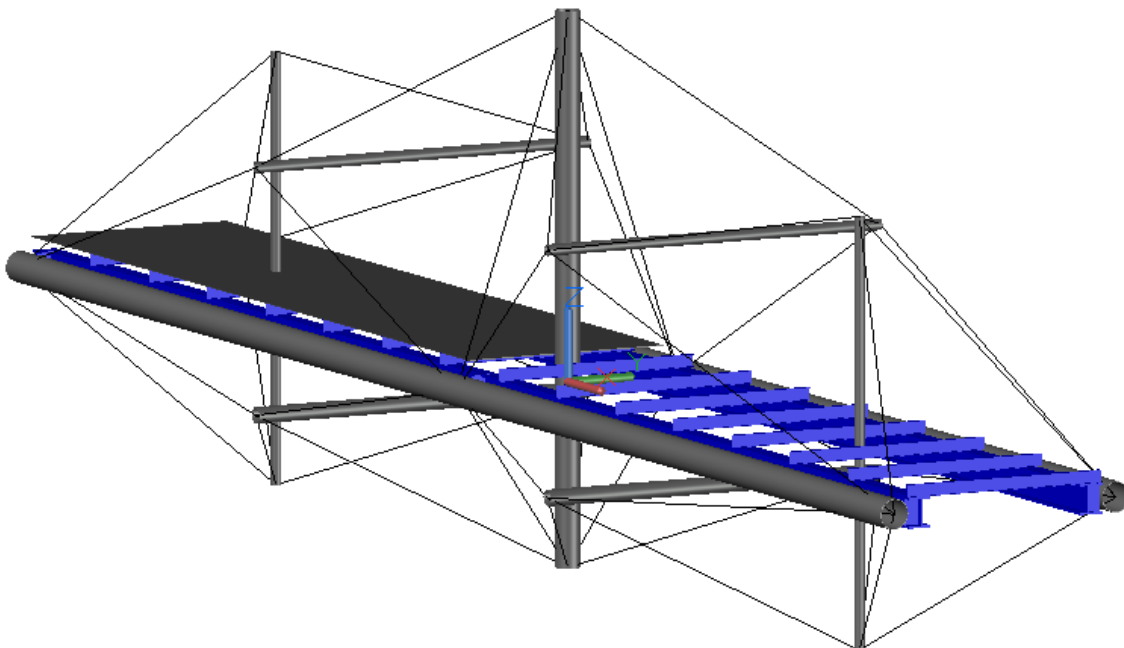


Figura 4.1 Modelo del puente realizado en AutoCAD donde se puede apreciar las vigas que sostienen al tablero. Estas vigas se unen a los elementos del puente tensegrítico únicamente en los extremos de los elementos del grupo de simetría 5.

Los perfiles W que soportan el tablero son: en dirección x (W18x158) y en dirección y (W8x10), como se muestran en la Figura 4.2.

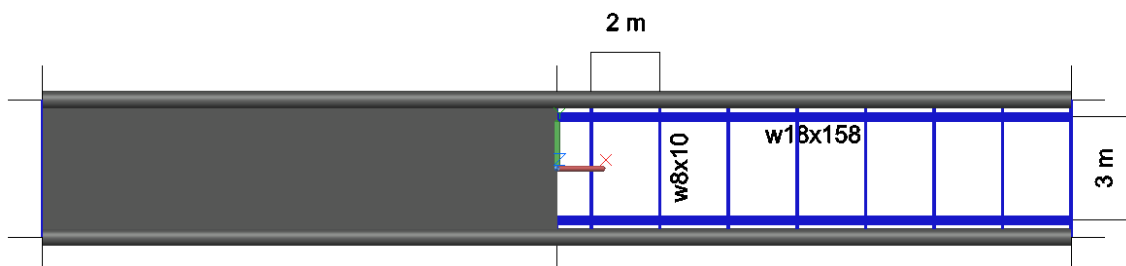


Figura 4.2 Corte realizado a lo largo de los ejes horizontales de los elementos del grupo de simetría 5. En él se puede apreciar cómo están distribuidas las vigas y que distancias existen entre ellas.

A continuación, se presentan los anchos tributarios y la aplicación de las cargas en las vigas W8x10. El ancho tributario b_{trib} es igual a 2 m excepto para las vigas del inicio y final, en donde b_{trib} es igual a 1 m. La carga W , para carga muerta correspondiente al peso propio de las planchas de acero, es igual a 125.6 Kg/m^2 y para carga viva peatonal es 440 Kg/m^2 . La carga distribuida q (Aplica sólo en carga muerta), de la imagen en donde se aplican cargas puntuales, corresponde al peso propio de la baranda metálica y es igual a 40 Kg/m .

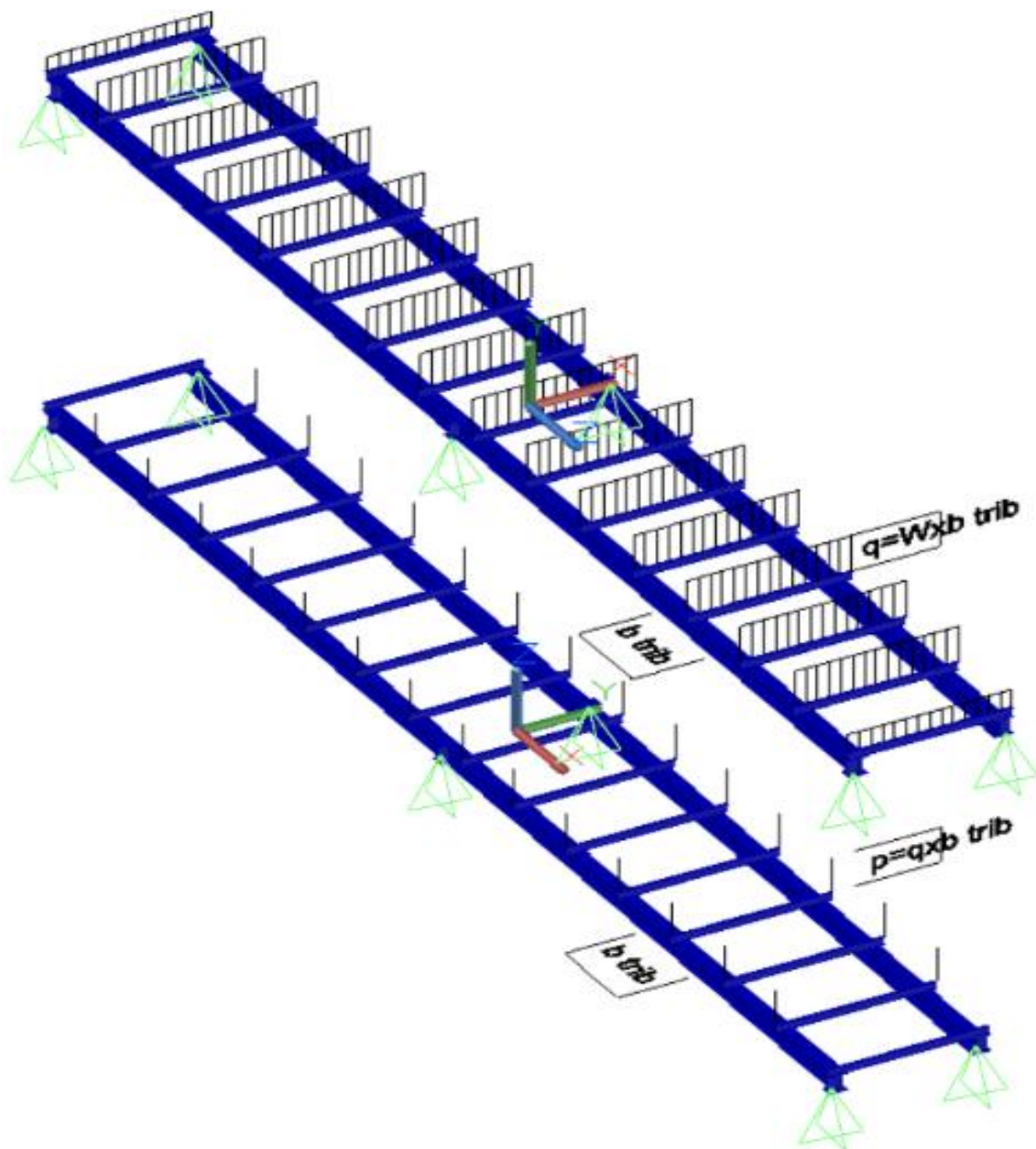


Figura 4.3 Aplicación de las cargas según el ancho tributario para las vigas 8x10. En la parte superior se indica cómo fueron aplicadas las cargas distribuidas debidas al tablero y a la carga peatonal. En la imagen de abajo se puede apreciar cómo se aplicaron las cargas puntuales generadas por la baranda de seguridad.

Una vez modelado el tablero y aplicadas las cargas, se puede obtener las reacciones en los apoyos (extremos de los elementos del grupo de simetría 5), ya que estos servirán para el diseño en los siguientes subcapítulos.

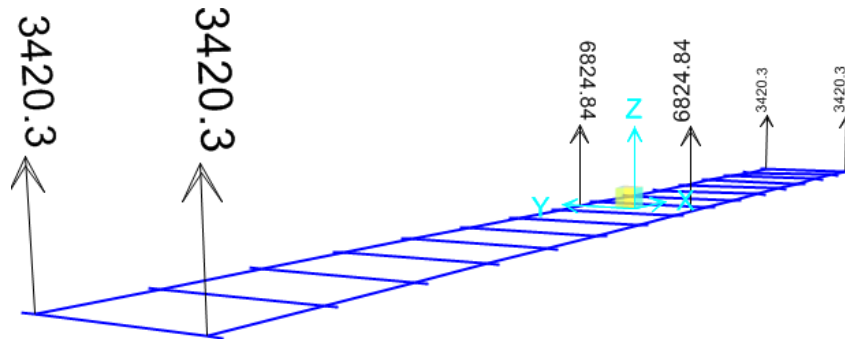


Figura 4.4 Reacciones debidas a carga muerta que se usaron en los siguientes subcapítulos.

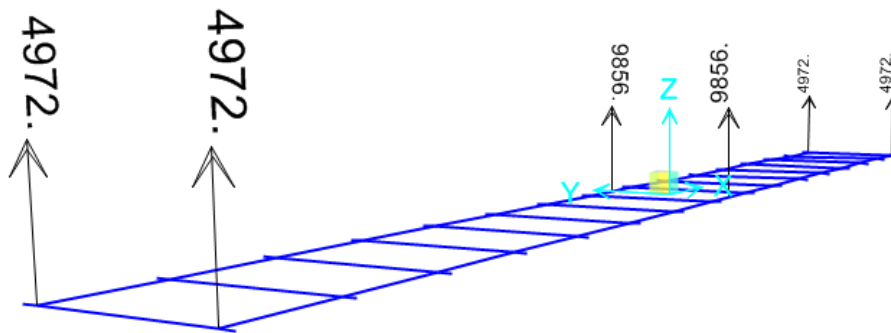


Figura 4.5 Reacciones debidas a carga viva que se usaron en los siguientes subcapítulos.

Las reacciones para la carga viva en el caso asimétrico, en donde solo se carga la mitad del puente, se presentan a continuación:

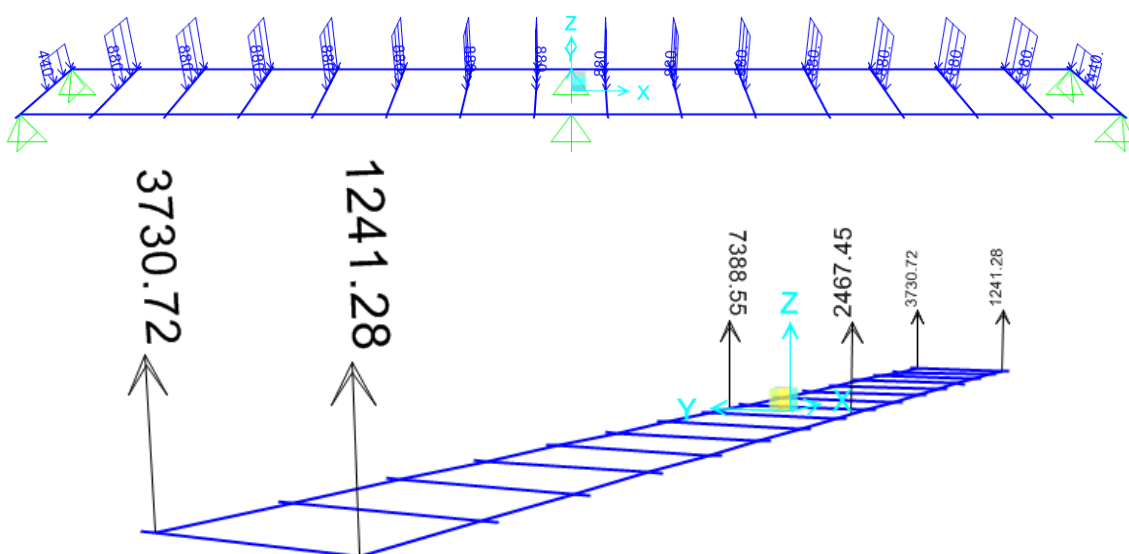


Figura 4.6 Arriba: Aplicación de la carga viva en el caso asimétrico. Abajo: Reacciones debidas a carga viva, en el caso asimétrico, que se usaron en los siguientes subcapítulos.

4.2. Proceso de Diseño

Una vez determinadas la geometría y la distribución de pre esfuerzo del puente, se procedió con el diseño estructural del mismo. Para la obtención de las cargas que actúan sobre el puente se utilizó la guía para puentes peatonales de AASHTO (AASHTO LRFD, 2009a), la especificación para el diseño de puentes (AASHTO LRFD, 2014) y la especificación para soportes estructurales para señales, luminarias y señales de tránsito (AASHTO LRFD, 2009b), esta última para el cálculo de la carga de viento.

Luego de realizado el cálculo de las cargas, se procedió a determinar las fuerzas que se generan en los elementos. Este análisis se lo realizó en el programa SAP2000 descrito en el capítulo anterior con elementos tipo *Truss* y *cable* para los elementos a compresión y tracción respectivamente. En este punto también se estableció el nivel de pre esfuerzo del puente.

Se colocaron todas las cargas, incluidas las de pre esfuerzo en el modelo y se determinó si la deflexión del puente en el centro de la luz es menor a la permitida. Se aumentó las fuerzas de pre esfuerzo hasta cumplir con el enunciado anterior y se procedió a dimensionar los elementos con las fuerzas internas obtenidas en SAP2000.

4.3. Cargas

Para tener una mejor referencia de donde están ubicadas las cargas, se presenta en la siguiente figura, la vista en planta del tablero, con los nodos en los cuales serán aplicadas las cargas puntuales.

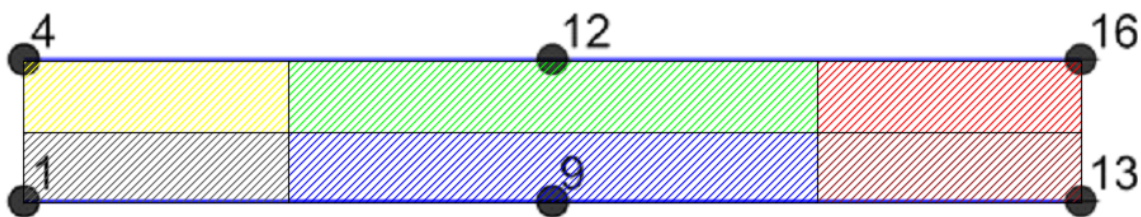


Figura 4.7 Vista en planta del tablero de acero para el puente. En esta imagen se pueden apreciar los nodos en donde se aplicaron las cargas puntuales y las áreas tributarias de los mismos.

A Partir de este punto, los cuadros que contengan valores de carga para los nodos indicados, harán referencia a la Figura 4.7. Las combinaciones de carga usadas en el presente trabajo son las que se proponen en la Tabla 3.4.1-1 de (AASHTO LRFD, 2014), presentada en la Figura 4.8:

Combinación de Cargas Estado Limite	DC DD DW EH EV ES EL PS CR SH	LL IM CE BR PL LS	WA	WS	WL	FR	TU	TG	SE	Usar sólo uno por vez				
										EQ	BL	IC	CT	CV
Resistencia I (excepto notas)	γ_p	1.75	1.00	—	—	1.00	0.50/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Resistencia II	γ_p	1.35	1.00	—	—	1.00	0.50/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Resistencia III	γ_p	—	1.00	1.40	—	1.00	0.50/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Resistencia IV	γ_p	—	1.00	—	—	1.00	0.50/1.20	—	—	—	—	—	—	—
Resistencia V	γ_p	1.35	1.00	0.40	1.0	1.00	0.50/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Evento Extremo I	γ_p	γ_{EQ}	1.00	—	—	1.00	—	—	—	1.00	—	—	—	—
Evento Extremo II	γ_p	0.50	1.00	—	—	1.00	—	—	—	—	1.00	1.00	1.00	1.00
Servicio I	1.00	1.00	1.00	0.30	1.0	1.00	1.00/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Servicio II	1.00	1.30	1.00	—	—	1.00	1.00/1.20	—	—	—	—	—	—	—
Servicio III	1.00	0.80	1.00	—	—	1.00	1.00/1.20	γ_{TG}	γ_{SE}	—	—	—	—	—
Servicio IV	1.00	—	1.00	0.70	—	1.00	1.00/1.20	—	1.0	—	—	—	—	—
Fatiga I— LL, IM & CE solamente	—	1.50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Fatiga II— LL, IM & CE solamente	—	0.75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Figura 4.8 Tabla de Factores de Carga de (AASHTO LRFD, 2014), traducido por (Rodríguez Serquén, 2016).

En la siguiente tabla se definen las cargas que intervienen en las combinaciones de carga mostradas en la Figura 4.8:

Tabla 4.1 Denominación de las cargas.

Cargas Permanentes:	
CR	Efectos debido al <i>creep</i> .
DD	Fricción negativa (<i>downdrag</i>).
DC	Peso propio de los componentes estructurales y accesorios no estructurales.
DW	Peso propio de las superficies de rodamiento e instalaciones para servicios públicos.
EH	Empuje horizontal del suelo.
EL	Tensiones residuales acumuladas resultantes del proceso constructivo, incluyendo el <i>jacking</i> de construcciones segmentales en voladizo.
ES	Sobrecarga de suelo.
EV	Presión vertical del peso propio del suelo de relleno.
PS	Fuerzas secundarias de postensado.
SH	Contracción.

Cargas Transitorias:	
BL	Explosiones.
BR	Fuerza de frenado de los vehículos.
CE	Fuerza centrífuga de los vehículos.
CR	Fluencia lenta.
CT	Fuerza de colisión de un vehículo.
CV	Fuerza de colisión de una embarcación.
EQ	Sismo.
FR	Fricción.
IC	Carga de hielo.
IM	Incremento por carga vehicular dinámica.
LL	Sobrecarga vehicular.
LS	Sobrecarga de la carga viva.
PL	Sobrecarga peatonal.
SE	Asentamiento.
TG	Gradiente de temperatura.
TU	Temperatura uniforme.
WA	Carga hidráulica y presión del flujo de agua.
WL	Viento sobre la sobrecarga.
WS	Viento sobre la estructura.

A continuación, se presenta una tabla de los factores que aplican para el diseño del puente peatonal:

Tabla 4.2 Combinaciones y Factores de Carga.

COMBINACIONES	DC	PL	WS
Resistencia I	1.25	1.75	0
Resistencia III	1.25	0	1.4
Servicio I	1	1	0.3

En el presente trabajo no se consideró el efecto de la carga sísmica.

4.3.1. Carga Muerta DC

Para la determinación de la carga muerta, se consideró el peso propio de los elementos estructurales y no estructurales, con los siguientes datos:

Tablero Metálico (*Deck*):

El tablero estará formado por planchas de acero de 3.5 m de ancho y que por norma (AASHTO LRFD, 2014) sección 6.7.3, no puede tener menos de 16 mm

(0.625 pulg) de espesor. Según el catálogo web de IPAC, la carga de superficie será 125.6 Kg/m².

Barandas Metálicas:

Para determinar la carga que aporta el peso propio de las barandas de seguridad, se tomará en cuenta el peso lineal y su altura según el catálogo web de Metalesa Seguridad Vial. La norma (AASHTO LRFD, 2014), en la sección 13.9.3 establece que, para puentes peatonales que también funcionen como ciclovía, la altura mínima es de 1.40 m, por lo tanto el peso lineal utilizado fue de 20 Kg/m.

Elementos sometidos a Compresión:

Se usaron perfiles HSS de sección circular de acero estructural, con una densidad de 7850 Kg/m³.

Elementos sometidos a Tracción:

Son cables estructurales de alta resistencia. Para el diseño se usaron diámetros, pesos y áreas especificadas en el catálogo de Bethlehem Wire Rope (Wirerope Works, 2013).

Tabla 4.3 Cargas permanentes aplicadas en los nodos de los elementos que pertenecen al 5^{to} grupo de simetría, como se muestra en la Figura 4.9.

Nodos	Área Tributaria (m ²)	Carga Muerta (Kg)
9 y 12	26.25	-6900

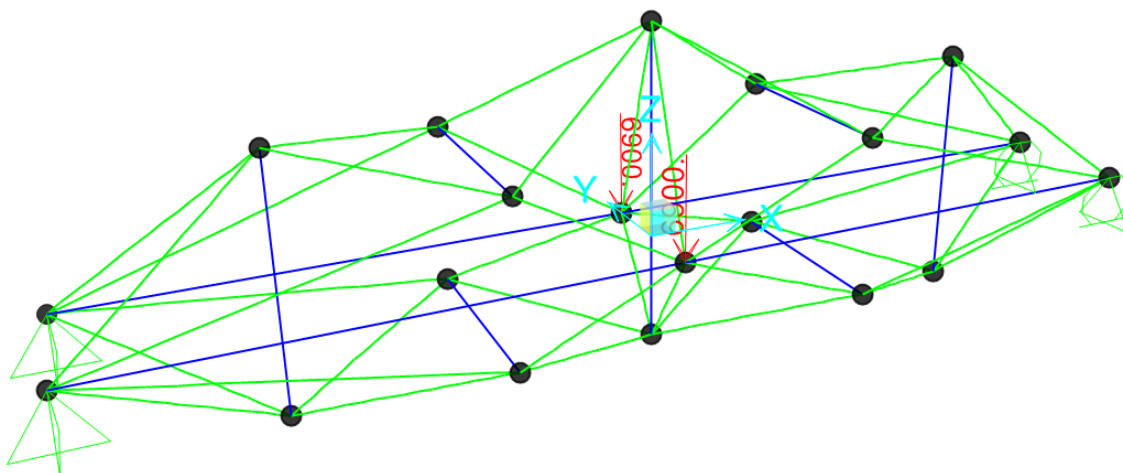


Figura 4.9 Aplicación de la carga muerta sobre elementos del grupo de simetría 5.

4.3.2. Carga Viva PL

Carga Peatonal:

En (AASHTO LRFD, 2009a) se establece que los puentes peatonales deben ser diseñados con una carga peatonal de 440 Kg/m^2 (90 psf). Esta carga se aplica directamente sobre la losa y a través de las vigas se transmite hacia los extremos de los elementos del grupo de simetría 5.

Tabla 4.4 Cargas Vivas Peatonales, aplicadas en los nodos de los elementos que pertenecen al 5^{to} grupo de simetría, como se muestra en la Figura 4.10.

Nodos	Área Tributaria (m ²)	Carga Viva (Kg)
9 y 12	26.25	-9900

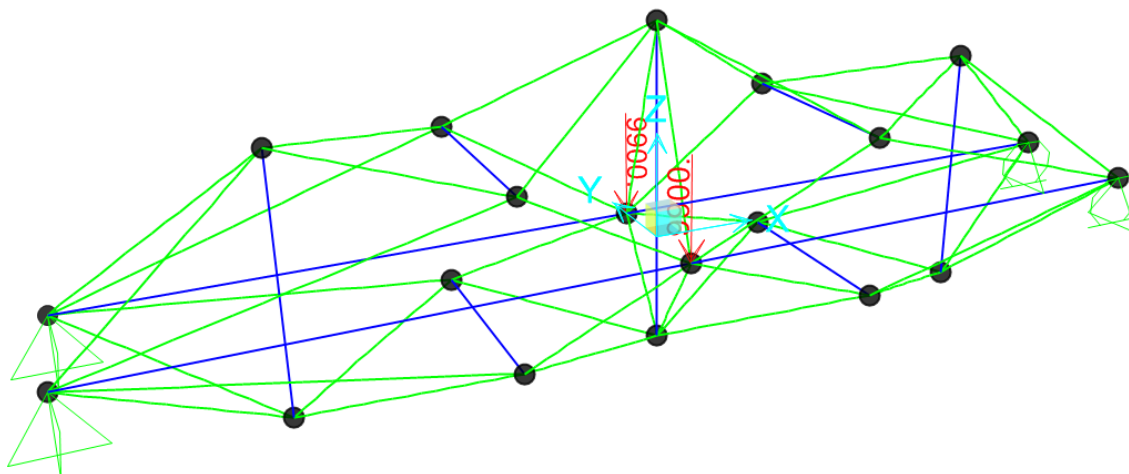


Figura 4.10 Aplicación de la Carga Viva sobre elementos del grupo de simetría 5.

Para el caso de carga asimétrico, el cual se muestra en la Figura 4.6 se tiene que las cargas en los nodos son:

Tabla 4.5 Cargas Vivas Peatonales (caso asimétrico), aplicadas en los nodos de los elementos que pertenecen al 5^{to} grupo de simetría, como se muestra en la Figura 4.11.

Nodos	Área Tributaria (m2)	Carga Viva CA (Kg)
9	26.25	-2500
12	26.25	-7400

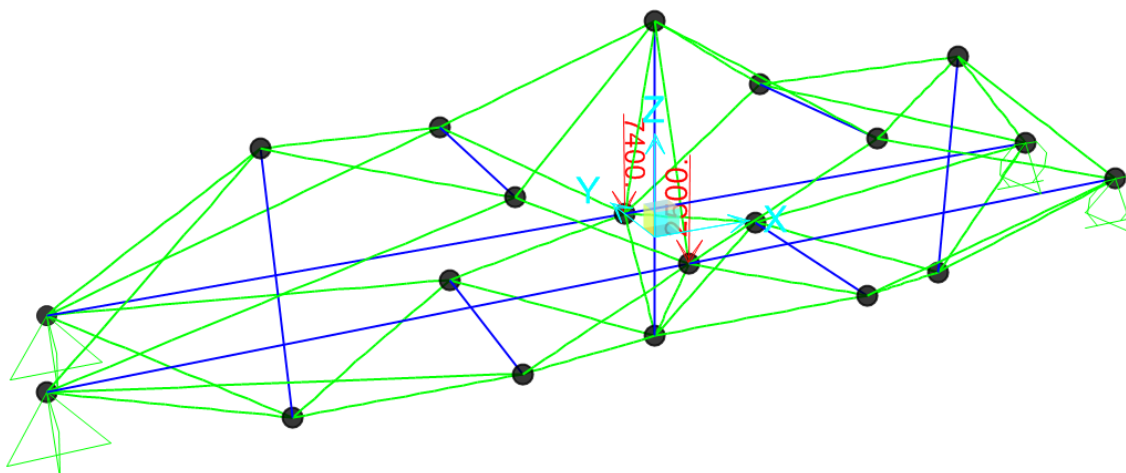


Figura 4.11 Aplicación de la Carga Viva (caso asimétrico) sobre elementos del grupo de simetría 5.

4.3.3. Carga de Viento WS

Para el cálculo de la carga de viento, la guía (AASHTO LRFD, 2009a) nos remite a la especificación para señales de tránsito el conocido *AASHTO Signs* (AASHTO LRFD, 2009b), específicamente a la sección 3.8, donde se muestra el procedimiento para calcular la carga de viento. Este proceso se muestra en el ANEXO B del presente trabajo.

Tabla 4.6 Cargas de Viento, aplicadas en los nodos de los elementos que pertenecen al 5^{to} grupo de simetría, como se muestra en la Figura 4.12.

Nodos	Área Tributaria (m ²)	Carga de Viento (Kg)
9	26.25	4500
12	26.25	1500

Tabla 4.7 Cargas de Viento, aplicadas en los elementos que pertenecen al 1ro, 2do y 5^{to} grupo de simetría, como se muestra en la Figura 4.12.

Grupo de Simetría	Sección	Carga de Viento (Kg/m)
1	HSS6.875X.500	12.484
2	HSS16X.438	28.962
5	HSS20X.500	36.239

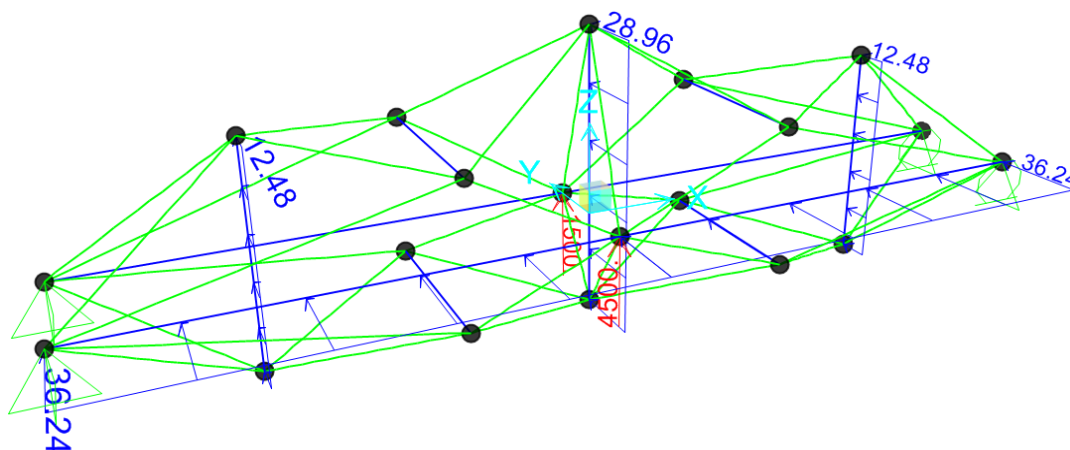


Figura 4.12 Aplicación de la Carga de Viento en la Estructura.

4.3.4. Combinaciones de Carga

Luego de aplicar las combinaciones de carga expuestas en la Tabla 4.2, se obtuvieron los siguientes valores para cargas puntuales:

Tabla 4.8 Combinaciones de Carga para las cargas nodales expuestas en las tablas anteriores.

Nodos	Resistencia I (Kg)	Resistencia III (Kg)	Servicio I (Kg)
9	-25950	-2325	-15450
12	-25950	-6525	-16350

Del mismo modo se aplican las combinaciones para las cargas distribuidas y se obtuvieron los siguientes valores:

Tabla 4.9 Combinaciones de Carga para las cargas distribuidas.

Grupo de Simetría	Resistencia I (Kg/m)	Resistencia III (Kg/m)	Servicio I (Kg/m)
1	0	17.48	3.75
2	0	40.55	8.69
5	0	50.73	10.87

En el Caso Asimétrico las combinaciones para cargas puntuales son:

Tabla 4.10 Combinación de Carga Asimétrica para las cargas nodales.

Nodos	Resistencia I CA (Kg)	Servicio I (Kg)
9	-13000	-8050
12	-21575	-13850

Las cargas distribuidas en el caso asimétrico tienen las mismas combinaciones que se presentan en la Tabla 4.9.

4.4. Propiedades de los Materiales

A continuación, se analizan las propiedades y características de los materiales usados para realizar el diseño, además, se indican las especificaciones que los materiales deben cumplir.

4.4.1. Perfiles HSS Circular

Las Secciones Estructurales Huecas HSS (*Hollow Structural Sections*) son secciones de acero de sección transversal circular y su uso está creciendo con popularidad en todo el mundo. Los usos más populares incluyen acero estructural expuesto arquitectónicamente, estructuras con armaduras y elementos básicos de columna o arriostramiento vertical (AISC, n.d.).

Características:

- La rigidez en los perfiles HSS circulares es igual en todos los sentidos, a menos que se presenten momentos de gran magnitud.
- Los perfiles HSS circulares son más eficientes para trabajar a compresión ya que tienen un radio de giro constante en todas las direcciones.
- Poseen alta resistencia a la torsión,
- Los perfiles HSS circulares son más eficientes que los rectangulares cuando se los somete a cargas de viento por su forma.

En el presente trabajo se usó el catálogo de secciones de AISC, ya que en este se puede encontrar una amplia lista con todo tipo de secciones y dimensiones para elegir fácilmente.

Propiedades Mecánicas:

Las secciones HSS se ajustan a las especificaciones ASTM A500, A501, A618, A847 y A1085 (AISC, n.d.). Para este estudio se seleccionó A500. A continuación, se presenta de manera más detallada las propiedades para estos perfiles:

Tabla 4.11 Propiedades Mecánicas de acero para HSS Circular (valores extraídos de SAP200).

Nomenclatura	Denominación	Valor	Unidad	Valor	Unidad
Acero	Tipo de Acero.	A500GrB42	-	A500GrB42	-
γ_s	Peso unitario.	0.49	Kcf	7850	Kg/m³
E	Módulo de Elasticidad	29000	Ksi	2040000	kg/cm²
ν	Módulo de Poisson	0.3	-	0.3	-
F_y	Esfuerzo de Fluencia.	42	Ksi	2950	kg/cm²
F_u	Esfuerzo Promedio de Rotura.	58	Ksi	4080	kg/cm²

4.4.2. Cable Estructural

Torres de radio y televisión, puentes, cubiertas y ensamblajes de cables, son aplicaciones que han convertido al cable estructural en un elemento fundamental en las estructuras. En el presente trabajo se usó el tipo de cable *Bethlehem Structural Strand*, como miembro a tensión.

Proceso de Fabricación:

El tipo de cable *Bethlehem Structural Strand* es una disposición de cables más pequeños colocados helicoidalmente alrededor de un alambre central para producir una sección transversal simétrica.

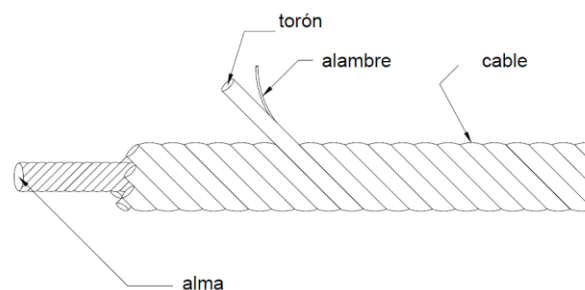


Figura 4.13 Estructura interna de un Cable (Ochoa & Orellana, 2016).

El número elementos mostrados en la Figura 4.13 definen el tipo de cable, existen cuatro tipos de cables como se muestra a continuación:

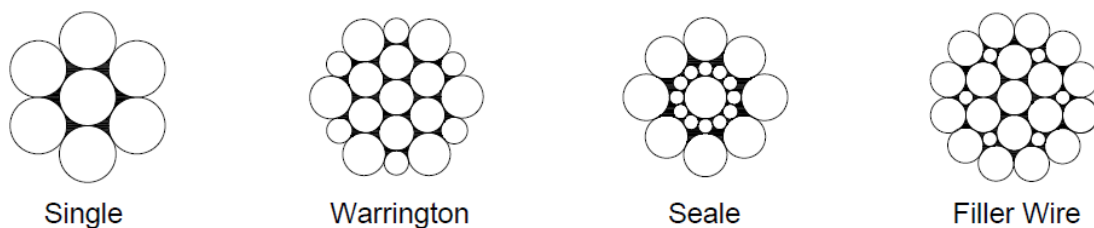


Figura 4.14 Construcciones de la sección transversal de un cable (Ochoa & Orellana, 2016).

Propiedades Mecánicas:

Fabricado por (Wirerope Works, 2013), este tipo de cable cumple con la especificación ASTM A586. Esta empresa posee cables que llegan a tener diámetros de hasta 5" ½. En el presente trabajo se optó por usar diámetros desde 1" 1/16 hasta 2" 3/16, para poder cumplir con las deflexiones máximas. A continuación, se presentan las propiedades mecánicas de estos cables:

Tabla 4.12 Propiedades Mecánicas de acero para Cables.

Nomenclatura	Denominación	Valor	Unidades	Valor	Unidades
Acero	Tipo de Acero.	A586	-	A586	-
γs	Peso unitario.	0.5127	Kcf	8212	Kg/m3
E	Módulo de Elasticidad	23000	Ksi	1617000	kg/cm2
ν	Módulo de Poisson	0.3	-	0.3	-
Fy	Esfuerzo de Fluencia.	198	Ksi	13900	kg/cm2
Fu	Esfuerzo Promedio de Rotura.	220	Ksi	15400	kg/cm2

4.5. Estados Límite

Dado que los elementos están sometidos a tracción o compresión y, además, tienen secciones HSS, los estados límite a los cuales está sometido, son menos que si estuvieran sujetos a más tipos de esfuerzo o si tuvieran otro tipo de sección.

4.5.1. Elementos a Compresión

Los elementos sometidos a compresión pueden sufrir de pandeo local y por flexión. Esto dependerá del tipo de sección que posea el perfil usado (Esbelta o No Esbelta). A continuación, se presenta la ecuación 6.9.4.2.1-5 de (AASHTO LRFD, 2014), que sirve para determinar si la sección es esbelta o no.

$$\frac{D}{t} < 0.11 \frac{E}{F_y}$$

Donde

D = Diámetro exterior de la sección HSS.

t = Espesor de la sección.

Analizando las dimensiones y propiedades de los perfiles usados se tiene que todos tienen secciones No Esbeltas, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 4.13 Tipo de sección para los perfiles usados.

Denominación del Perfil	Razón Ancho-Espesor		Límite	Tipo de sección
HSS6.875X.500	D/t	14.785	69.348	No Esbelta
HSS16X.438	D/t	39.312	69.348	No Esbelta
HSS7.5X.375	D/t	21.490	69.348	No Esbelta
HSS10.75X.375	D/t	30.802	69.348	No Esbelta
HSS20X.500	D/t	43.011	69.348	No Esbelta

Ya que las secciones son No Esbeltas, las barras sólo podrán sufrir pandeo por flexión, esto lo establece (AASHTO LRFD, 2014) en tabla 6.9.4.1.1-1. También se indican los pasos a seguir para determinar el Pandeo por Flexión, el primero de ellos es determinar la razón de esbeltez que se calcula con la siguiente ecuación:







$$\text{Razon de Esbeltez} = \frac{KL}{r}$$

Donde K es el factor de esbeltez, L la longitud del elemento y r del radio de giro. El valor de K depende de las condiciones de apoyo y se debe tomar en cuenta los valores que se dan en la Tabla 4.14.





(AASHTO LRFD, 2014), recomienda para elementos diseñados a compresión, que los miembros primarios deben tener una esbeltez menor o igual a 120 y los miembros secundarios menor o igual a 140:

Tabla 4.14 Valores aproximados para el Factor de longitud efectiva K (McCormac, 2016).

Las líneas punteadas muestran la forma pandeada de la columna

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
						
Valor K teórico	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Valores recomendados de diseño cuando las condiciones reales son aproximadas	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0

Símbolos para las condiciones de extremo

 Rotación y traslación impedidas
 Rotación libre y traslación impedida
 Rotación impedida y traslación libre
 Rotación y traslación libres

Dependiendo del valor de la Razón de Esbeltez que tenga el elemento, se puede tener Pandeo Elástico o Pandeo Inelástico. Las ecuaciones de acuerdo a (AASHTO LRFD, 2014) son las siguientes:

Pandeo Inelástico

$$\frac{KL}{r} \leq 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad \text{ó} \quad \frac{F_e}{F_y} \geq 0.44$$

$$F_{cr} = \left[0.658^{\frac{F_y}{F_e}} \right] * F_y$$

Pandeo Elástico

$$\frac{KL}{r} > 4.71 \sqrt{\frac{E}{F_y}} \quad \text{ó} \quad \frac{F_e}{F_y} < 0.44$$

$$F_{cr} = 0.877 * F_e$$

Donde F_e es el esfuerzo de pandeo de Euler que se calcula con:

$$F_e = \frac{\pi^2 * E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

Una vez realizados estos cálculos, se puede determinar la resistencia a compresión nominal P_n , y la carga última P_u .

$$P_n = F_{cr} * A_g$$

$$P_u \leq \phi_c P_n$$

$$\phi_c = 0.95$$

Donde A_g es el área de la sección transversal del elemento. El valor del factor de resistencia ϕ_c , viene dado en (AASHTO LRFD, 2014).

4.5.2. Elementos a Tensión

El análisis para los elementos a tracción, es más sencillo que el de los de compresión, ya que en este no existe pandeo, y la resistencia a la tracción P_r viene dada por las siguientes expresiones:

Fluencia

$$P_r = \phi_y P_{ny} = \phi_y F_y A_g$$

Ruptura

$$P_r = \phi_u P_{nu} = \phi_u F_u A_n R_p U$$

Tabla 4.15 Denominación de Variables para el cálculo de la Resistencia a la Tracción P_r (AASHTO LRFD, 2014).

P_{nv}	Resistencia a la tracción nominal para fluir en la sección bruta.
A_n	Área neta.
R_p	Factor de reducción para agujeros tomados igual a 0.90 para agujeros de pernos perforados de tamaño completo y 1.0 para agujeros de pernos perforados de tamaño completo o sub perforados y fresados a medida.
U	Factor de reducción para tener en cuenta el desfase de corte; 1.0 para componentes en los que los efectos de fuerza se transmiten a todos los elementos.
ϕ_y	Factor de resistencia para ceder miembros de tensión.
ϕ_u	Factor de resistencia para la fractura de miembros de tensión.

4.6. Resultados y Análisis

Luego de que se sometió a la estructura a las combinaciones de carga descritas anteriormente, se obtuvo resultados como: secciones de elementos, nivel de pre esfuerzo, desplazamientos y cargas axiales cuando se aplican únicamente las fuerzas de pre esfuerzo, deflexiones máximas bajo cargas de servicio, cargas axiales, relaciones Demanda/Capacidad, etc.

4.6.1. Diseño de los Elementos

A continuación, se presentan las secciones utilizadas para los elementos. Como se mencionó anteriormente para los elementos a compresión se utilizó secciones HSS Circulares y para los elementos a tracción se usó cables.

Elementos Comprimidos

Tabla 4.16 Dimensiones de diseño de los componentes comprimidos.

Grupo de Simetría	Sección	Diámetro (mm)	Espesor (mm)	Densidad Lineal (Kg/m)	Longitud (m)
1	HSS6.875X.500	175	11.8	50.7	7.00
2	HSS16X.438	406	10.3	108	9.00
3	HSS7.5X.375	191	8.86	42.5	6.00
4	HSS10.75X.375	273	8.86	61.9	6.00
5	HSS20X.500	508	11.8	155	15.00

Elementos Traccionados

Para cumplir con las deflexiones máximas $l/1000 = 30 \text{ mm}$, que establece la norma (AASHTO LRFD, 2014), se usaron los diámetros descritos en la Tabla

4.17, y así se obtuvieron razones de Demanda/Capacidad entre 0.51 y 0.85. A continuación, se presenta las propiedades de la sección de cable utilizado.

Tabla 4.17 Propiedades del cable utilizado en el diseño de Puente.

Grupo de Simetría	Denominación	Número de Cables	Diámetro (mm)	Área (cm ²)	Carga de Rotura (Ton)	Densidad Lineal (Kg/m)
6, 7, 8 y 11	1 1/16	16	27	4.368	65.5	3.527
13, 16 y 17	1 3/16	8	30	5.458	81.7	4.405
9, 12 y 14	1 9/16	12	40	9.484	144	7.634
10 y 15	2 3/16	8	56	18.516	284	15.030

Debido a que los perfiles HSS pesan en total 12.2 Ton, los cables 2.2 Ton y el tablero con todos sus componentes 27.3 Ton, el peso total de la estructura es de 41.7 Ton. Como la longitud del puente es 30 m y el ancho del tablero es 3.5 m, el peso del puente por metro cuadrado es de 400 Kg/m².

4.6.2. Fuerzas de Pre Esfuerzo de los Elementos

Las fuerzas presentadas en la Tabla 4.18 se obtuvieron una vez encontrada la distribución relativa con el código de MATLAB. Con estos coeficientes se probó niveles de Pre Esfuerzo hasta cumplir con las deflexiones, tomando en cuenta la capacidad de los elementos.

Tabla 4.18 Fuerzas de Pre Esfuerzo.

Grupo de Simetría	Fuerza Interna Inicial (Ton)
1	-56.85
2	-240
3	-69.48
4	-126.33
5	-300
6	38.13
7	38.94
8	33.63
9	75.06
10	171.15
11	38.04
12	82.83
13	43.59
14	78.33
15	152.1
16	46.59
17	53.13

4.6.3. Desplazamiento de Nodos y Cargas Axiales en Estado de Pre Esfuerzo

Desplazamientos Nodales:

A continuación, se presenta el modelo con los números de nodos correspondientes a los desplazamientos que constan en la Tabla 4.19:

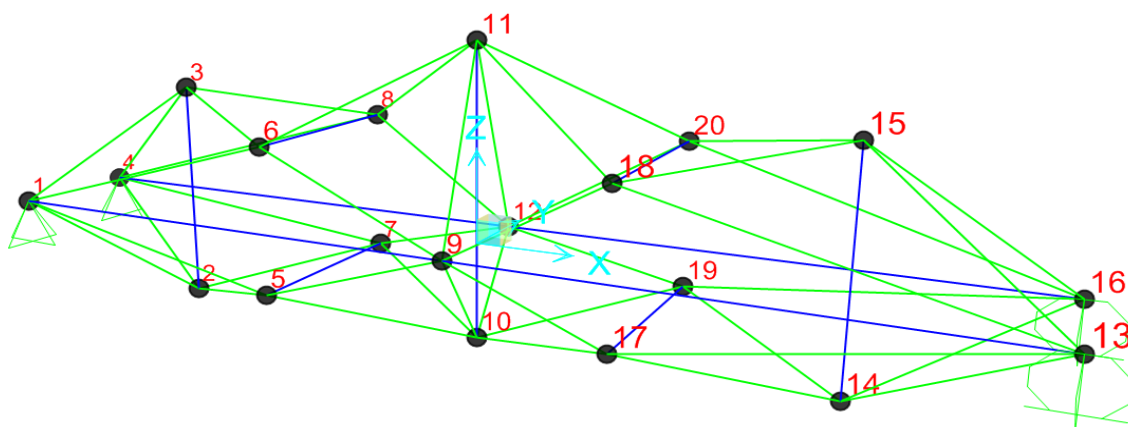


Figura 4.15 Nodos que conforman la estructura del puente tensegrítico.

Tabla 4.19 Desplazamientos debidos únicamente a las Fuerzas de Pre Esfuerzo. Extraído de SAP2000.

Nodo	Caso de Carga	x (mm)	y (mm)	z (mm)
1	PRETENSADO	0	0	0
2	PRETENSADO	0.00513	-2.901E-13	0.011308
3	PRETENSADO	-0.003737	-2.47E-13	0.01136
4	PRETENSADO	0	0	0
5	PRETENSADO	-0.002221	-0.000236	0.011604
6	PRETENSADO	-0.000631	-0.00015	0.018609
7	PRETENSADO	-0.002221	0.000236	0.011604
8	PRETENSADO	-0.000631	0.00015	0.018609
9	PRETENSADO	-0.00012	-0.010096	0.012485
10	PRETENSADO	-0.00012	8.76E-14	0.017047
11	PRETENSADO	-0.00012	-1.078E-12	0.017029
12	PRETENSADO	-0.00012	0.010096	0.012485
13	PRETENSADO	-0.000239	0	0
14	PRETENSADO	-0.00537	1.252E-12	0.011308
15	PRETENSADO	0.003498	-9.12E-13	0.01136
16	PRETENSADO	-0.000239	0	0
17	PRETENSADO	0.001981	-0.000236	0.011604
18	PRETENSADO	0.000391	-0.00015	0.018609
19	PRETENSADO	0.001981	0.000236	0.011604
20	PRETENSADO	0.000391	0.00015	0.018609

Como era de esperarse los desplazamientos son prácticamente cero, ya que las fuerzas de pre esfuerzo aplicadas corresponden a las de auto equilibrio de la estructura.

Fuerzas Axiales:

Se presenta en la Figura 4.16 los diagramas de las Fuerzas de Axiales en los elementos debidas a las Fuerzas de Pre Esfuerzo.

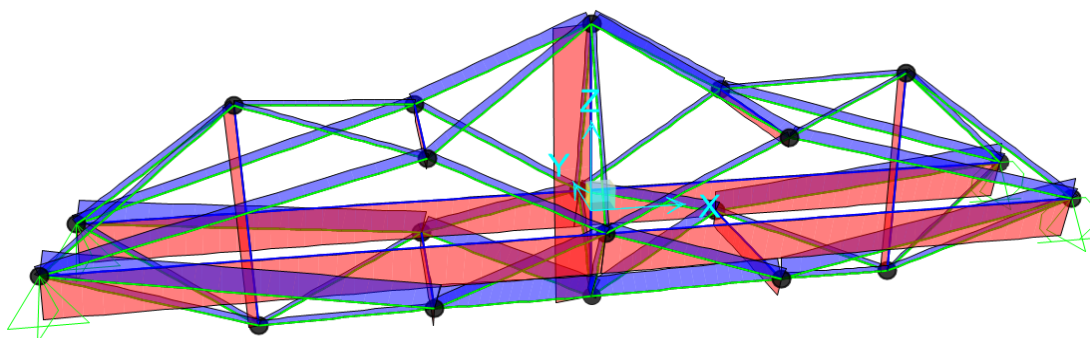


Figura 4.16 Diagrama de Fuerzas Axiales Internas bajo las cargas de Pre Esfuerzo.

La teoría dice que los desplazamientos nodales deben ser cero y además las fuerzas internas deben ser las mismas que se introdujo como fuerza de pre esfuerzo (Tabla 4.18). Las pequeñas diferencias que existen se deben al cálculo numérico que realiza el programa y a la rigidez de los elementos.

Tabla 4.20 Fuerzas internas que SAP2000 calcula al aplicar la Fuerza de Pre Esfuerzo.

Grupo de Simetría	Caso de Carga	P SAP2000	P método	Diferencia
		Ton	Ton	Ton
1	PRETENSADO	-56.849	-56.850	0.001
2	PRETENSADO	-240.001	-240.000	0.000
3	PRETENSADO	-69.475	-69.480	0.005
4	PRETENSADO	-126.318	-126.330	0.012
5	PRETENSADO	-300.003	-300.000	-0.003
6	PRETENSADO	38.136	38.130	0.005
7	PRETENSADO	38.938	38.940	-0.002
8	PRETENSADO	33.632	33.630	0.002
9	PRETENSADO	75.069	75.060	0.009
10	PRETENSADO	171.135	171.150	-0.015
11	PRETENSADO	38.031	38.040	-0.009
12	PRETENSADO	82.829	82.830	-0.001
13	PRETENSADO	43.594	43.590	0.004
14	PRETENSADO	78.331	78.330	0.001
15	PRETENSADO	152.103	152.100	0.003
16	PRETENSADO	46.604	46.590	0.014
17	PRETENSADO	53.136	53.130	0.006

4.6.4. Deflexiones debidas a Cargas de servicio en los Nodos

Las deflexiones deben cumplir la normativa (AASHTO LRFD, 2014), que especifica que, para un puente con una luz libre L , la deflexión máxima admisible será de $L/1000 = 30 \text{ mm}$. Las deflexiones obtenidas bajo cargas de servicio se presentan a continuación y como se puede apreciar se cumple con la normativa:

Tabla 4.21 Deflexión bajo cargas de servicio.

Nodo	Carga	Desplazamientos en z mm
1	SERVICIO I	0.000
2	SERVICIO I	-9.394
3	SERVICIO I	-9.353
4	SERVICIO I	0.000
5	SERVICIO I	-25.288
6	SERVICIO I	-24.998
7	SERVICIO I	-25.601
8	SERVICIO I	-25.408
9	SERVICIO I	-28.659
10	SERVICIO I	-25.440
11	SERVICIO I	-25.440
12	SERVICIO I	-29.031
13	SERVICIO I	0.000
14	SERVICIO I	-9.394
15	SERVICIO I	-9.353
16	SERVICIO I	0.000
17	SERVICIO I	-25.280
18	SERVICIO I	-25.003
19	SERVICIO I	-25.608
20	SERVICIO I	-25.402
	MÁXIMO	-29.031

En siguiente figura se pueden ver los desplazamientos de los nodos, amplificados con un factor de 100 para que sea visible la deflexión.

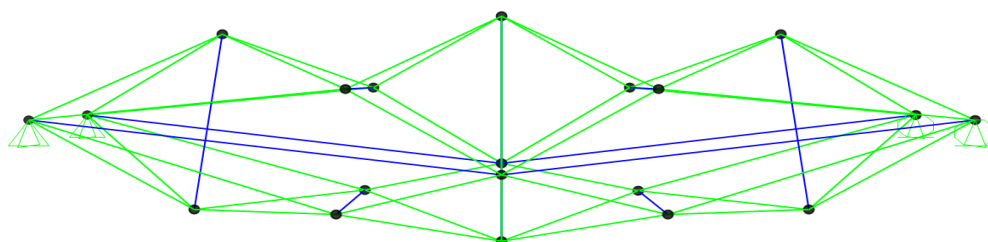


Figura 4.17 Estructura deformada bajo Cargas de Servicio. Desplazamientos amplificados por el programa con un factor de 100.

4.6.5. Fuerzas Axiales en los elementos debidas a las Combinaciones de Carga.

Los resultados para esta sección se presentan en la Tabla 4.22, en donde las columnas desde izquierda a derecha corresponden a: Grupo de Simetría, combinación Resistencia I, combinación Resistencia III, combinación Servicio I, combinación Servicio I en el Caso Asimétrico, Demanda Máxima, Capacidad de los elementos y la relación Demanda/Capacidad.

Tabla 4.22 Fuerzas axiales mayoradas, capacidades de los elementos y razón Demanda/Capacidad.

Grupo de Simetría	Sección	PRE ESFUERZO (Ton)	RESIS I (Ton)	RESIS III (Ton)	SERV I (Ton)	RESIS I CA * (Ton)	SERV I CA * (Ton)	Máxima Demanda (Ton)	Capacidad del elemento (Ton)	D/C
1	HSS6.875X.500	-56.850	-54.523	-56.198	-55.381	-55.136	-55.769	-56.850	-68.512	0.83
2	HSS16X.438	-240.000	-239.611	-238.359	-239.178	-239.235	-239.072	-240.000	-279.377	0.86
3	HSS7.5X.375	-69.480	-54.153	-65.862	-60.151	-58.808	-62.851	-69.480	-83.067	0.84
4	HSS10.75X.375	-126.330	-143.307	-130.371	-136.553	-138.005	-133.589	-143.307	-160.192	0.89
5	HSS20X.500	-300.000	-302.043	-301.753	-301.282	-301.517	-301.093	-302.043	-329.355	0.92
6	Cable 1 1/16	38.130	36.180	38.601	37.095	37.819	38.051	38.601	65.500	0.59
7	Cable 1 1/16	38.940	38.068	39.208	38.530	37.476	38.214	39.208	65.500	0.60
8	Cable 1 1/16	33.630	32.295	32.631	32.662	31.930	32.479	33.630	65.500	0.51
9	Cable 1 9/16	75.060	50.297	70.081	60.220	58.816	65.117	75.060	144.000	0.52
10	Cable 2 3/16	171.150	199.620	177.776	188.177	190.114	182.805	199.620	284.000	0.70
11	Cable 1 1/16	38.040	36.753	37.827	37.253	37.806	37.883	38.040	65.500	0.58
12	Cable 1 9/16	82.830	58.487	77.551	68.026	66.523	72.675	82.830	144.000	0.58
13	Cable 1 3/16	43.590	36.535	41.954	39.479	38.525	40.611	43.590	81.700	0.53
14	Cable 1 9/16	78.330	80.348	78.496	79.161	80.243	79.090	80.348	144.000	0.56
15	Cable 2 3/16	152.100	181.745	159.374	170.209	171.807	164.632	181.745	284.000	0.64
16	Cable 1 3/16	46.590	69.706	49.682	60.094	60.116	54.621	69.706	81.700	0.85
17	Cable 1 3/16	53.130	36.037	48.923	42.534	42.928	46.474	53.130	81.700	0.65

* Las letras CA, hacen referencia al Caso Asimétrico.

De esta manera se culmina el diseño del puente peatonal tensegrítico de 30 m de longitud. Como se puede apreciar en la Tabla 4.22, las relaciones Demanda/Capacidad están en un rango aceptable, a excepción de algunos cables que tienen utilidades algo menores, como es el caso de los cables de los grupos de simetría 8, 9 y 13. Esto se debe a que, si se colocan elementos con menor capacidad para aumentar la relación Demanda/Capacidad, la estructura se deforma más y no se cumple con las deflexiones establecidas por la normativa. La solución fue asignar a los elementos las secciones que se presentaron en las Tablas 4.16 y 4.17.

5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se logró una propuesta de diseño para un puente tensegrítico de 30 m de longitud, aplicando los conceptos del capítulo 2, en las secciones correspondientes al comportamiento mecánico de las estructuras tensegríticas.

La modelación física del puente a escala y de los modelos sencillos de los módulos tensegríticos, permitió conocer más de cerca las dificultades constructivas que este sistema conlleva, en especial el problema de lidiar con fuerzas muy grandes para conseguir el pre esfuerzo de la estructura. Además, la modelación física facilitó la consolidación de los conocimientos sobre el sistema, ya que el trabajo práctico es fundamental para entender cómo funciona la tensegridad.

El ingeniero debe considerar el proceso constructivo en la determinación de las secciones de los elementos, ya que este puede incluir esfuerzos al momento del ensamblaje, mayores a las capacidades seleccionadas únicamente con las combinaciones de carga.

En el momento en que se determinó la carga muerta que se aplica en la estructura, no se tomó en cuenta el peso de componentes no estructurales que pueden aumentar esta carga. La determinación de las cargas debe realizarse de forma precisa si se trata de un proyecto específico y revisarse adecuadamente, para que la estructura soporte todas las cargas que apliquen.

En el presente trabajo no se realizó el análisis no lineal de pandeo, pero cabe recalcar que este tipo de análisis es indispensable y se debe realizar cuando se trata de proyectos que puedan llegar a construirse.

Al no existir una normativa específica para el diseño y construcción de estructuras tensegríticas, ya que es un sistema relativamente nuevo, en el presente diseño se usaron las normas que normalmente se usan para el diseño de puentes peatonales y las experiencias en diseños de estructuras con el mismo sistema.

En este trabajo, también se buscó analizar un puente de una luz más grande que la del puente diseñado, y aunque se logró encontrar muchas formas para puentes, con modos factibles de pre esfuerzo integral, incluso de 110 m de luz, estos modelos exigían fuerzas de pre esfuerzo muy superiores a las capacidades de los elementos disponibles en el mercado.

Por tanto, se concluye que, aunque se puedan encontrar formas para puentes de grandes luces que, si posean un modo factible de pre esfuerzo integral, que cumplan con la condición de rigidez unilateral de los elementos y validen la



forma del ensamblaje, esto no garantiza que se pueda dar la rigidez necesaria al sistema, debido a que las fuerzas de pre esfuerzo pueden generar demandas en la estructura muy grandes. Si se opta por reducir estas fuerzas, las deflexiones pueden ser mucho mayores a las permitidas.

Propuestas de Investigaciones Futuras:

Las siguientes propuestas no limitan las investigaciones extras que se puedan hacer con respecto a este tema:

- Análisis Sísmico de la estructura con espectros y registros sísmicos.
- Uso de diferentes métodos de búsqueda de para generar puentes más eficientes, de manera que se optimice el uso de secciones y se aumente la luz libre.
- Construcción de modelos físicos más grandes, para probarlos con cargas que permitan comprender mejor las fuerzas de pre esfuerzo y las que se aplican en la estructura.
- Realizar el Análisis No Lineal de Pandeo Global del puente diseñado.

6. BIBLIOGRAFÍA

- AASHTO LRFD. (2009a). *Guide Specifications for Design of Pedestrian Bridges*. American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC.
- AASHTO LRFD. (2009b). *Standard Specifications for Structural Supports for Highway Signs, Luminaires, and Traffic Signals* (5th ed.). American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC.
- AASHTO LRFD. (2014). *Bridge Design Specifications* (7th ed.). American Association of State Highway and Transportation Officials, Washington, DC.
- AISC. (n.d.). HSS | American Institute of Steel Construction. Retrieved January 30, 2018, from <https://www.aisc.org/technical-resources/hss/>
- Blanco Blanch, P. (2010). *Pretensado de columnas Tensegrity para el incremento de rigidez axial*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Burkhardt, R. (2004). A practical guide to tensegrity design.
- Burzev, I., & Korczynski, K. (2013). TENSEGRITY.
- CSI Spain. (n.d.). SAP2000 Información General. Retrieved December 27, 2017, from <http://www.csiespana.com/software/2/sap2000>
- Díaz Herrada, N. J. (2014). *Los sistemas de tensegrity: prototipo de un panel interior divisorio*. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Ferrer, M. (n.d.). *Arquitectura Arkinetia - La historia de la Historia de AutoCAD*. Retrieved from http://arkinetia.com/recursos/la-historia-de-la-historia-de-autocad_a92/
- Fuller, R. B. (1982). *Synergetics: explorations in the geometry of thinking*. Estate of R. Buckminster Fuller.
- Garia Barreno, P. (2009). Tensegridad Arquitectura, arte, biología. *Arquitectura Viva*, (125), 19.
- Guest, S. (2006). The stiffness of prestressed frameworks: a unifying approach. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3), 842–854.
- Heartney, E., & Snelson, K. (2013). *Kenneth snelson - ART AND IDEAS*.
- HELP DESIGN CO. (n.d.). Tensegrity — HELP DESIGN CO. Retrieved February 5, 2018, from <http://www.helpdesign.com/tensegrity/>
- Jáuregui, V. G. (2007). *Tensegridad: estructuras tensegríticas en ciencia y arte*.

Ed. Universidad de Cantabria.

- Lay, D. C. (2007). *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Pearson education.
- MATLAB. (n.d.). MATLAB - El lenguaje del cálculo técnico. Retrieved December 27, 2017, from <https://es.mathworks.com/products/matlab.html>
- McCormac, J. (2016). *Diseño de estructuras de acero*. Alfaomega Grupo Editor.
- Motro, R. (2003). *Tensegrity: structural systems for the future*. Elsevier.
- Motro, R. (2006). *Tensegrity: structural systems for the future*. Elsevier.
- Ochoa, L. A., & Orellana, P. F. (2016). Tensegridad como sistema estructural alternativo aplicado a cubiertas.
- Pugh, A. (1976). *An introduction to tensegrity*. University of California Press.
- Rodriguez Serquén, A. (2016). *PUENTES Con AASHTO-LRFD 2014* (7th ed.). Perú.
- Schenk, M. (2005). Statically balanced tensegrity mechanisms. *A Literature Review. Department of BioMechanical Engineering. Delft University of Technology*.
- Skelton, R. E., & de Oliveira, M. (2009). *Tensegrity Systems*. Springer Science & Business Media.
- Snelson, K. (1965). Continuous tension, discontinuous compression structures. Google Patents. Retrieved from <https://www.google.com/patents/US3169611>
- Snelson, K. (1996). Snelson on the tensegrity invention. *International Journal of Space Structures*, 11(1–2), 43–48.
- Snelson, K. (2012). The art of tensegrity. *International Journal of Space Structures*, 27(2–3), 71–80.
- tensegritywiki. (n.d.). Tensegrity - Bridge. Retrieved February 7, 2018, from <http://tensegritywiki.com/Bridge>
- Tibert, A. G., & Pellegrino, S. (2011). Review of form-finding methods for tensegrity structures. *International Journal of Space Structures*, 26(3), 241–255.
- Vassart, N., & Motro, R. (1999). Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems. *International Journal of Space Structures*, 14(2), 147–154.
- Wirerope Works, I. (2013). Products | Structural Strand | Wire Rope Works Inc.- Bethlehem Wirerope. Retrieved January 30, 2018, from

<http://www.wireropeworks.com/products-structural-strand-wirerope-works-bethlehem.php>

- Yuan, X., Chen, L., & Dong, S. (2007). Prestress design of cable domes with new forms. *International Journal of Solids and Structures*, 44(9), 2773–2782.
- Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2006). Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures. *International Journal of Solids and Structures*, 43(18), 5658–5673.
- Zhang, J. Y., & Ohsaki, M. (2015). *Tensegrity Structures*. *Tensegrity Structures*. <https://doi.org/10.1007/978-4-431-54813-3>
- Zhang, Z., Dong, S., & Fu, X. (2008). Structural design of a spherical cable dome with stiff roof. *International Journal of Space Structures*, 23(1), 45–56.

7. ANEXOS

7.1. ANEXO A: Obtención de la Matriz de Equilibrio.

Conectividad:

La conectividad de una estructura define como están conectados los miembros por sus nodos. Esta puede ser descrita en la matriz C^s de conectividad, que contiene en cada fila, los valores de 1 y -1 en la posición de los nodos que conecta el elemento. Los demás elementos de esa fila son igual a cero (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2015).

Por conveniencia a esta matriz se la puede dividir de manera que la conectividad de los nodos libres C se coloca primero y luego la de los nodos restringidos C^f , como se puede ver en (68):

$$C^s = (C, C^f) \quad (68)$$

Vectores de Diferencias de Coordenadas:

Para vectores de coordenadas de nodos libres x, y, z , y nodos restringidos x^f, y^f, z^f , se plantean los siguientes vectores de diferencias de coordenadas:

$$\begin{aligned} u &= Cx + C^f x^f \\ v &= Cy + C^f y^f \\ w &= Cz + C^f z^f \end{aligned} \quad (69)$$

Si se crean matrices con diagonales iguales a los vectores de (69) y el resto de valores cero, se obtienen:

$$\begin{aligned} U &= \text{diag}(u) \\ V &= \text{diag}(v) \\ W &= \text{diag}(w) \end{aligned} \quad (70)$$

Con lo cual se puede obtener la matriz de longitudes de los elementos, esta matriz tiene valores únicamente en su diagonal.

$$L^2 = U^2 + V^2 + W^2 \quad (71)$$

Ecuaciones de Equilibrio por balance de Fuerzas

Las ecuaciones de equilibrio de los nodos libres de una estructura articulada, con respecto al vector de fuerzas internas s puede combinarse de la siguiente manera:

$$As = p \quad (72)$$

Donde A es la matriz de equilibrio y p es el vector de fuerzas externas y se definen como se muestra en

$$A = \begin{pmatrix} A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$p = \begin{pmatrix} p^x \\ p^y \\ p^z \end{pmatrix} \quad (74)$$

Las componentes de A en las direcciones x, y y z se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} A^x &= C^T U L^{-1} \\ A^y &= C^T V L^{-1} \\ A^z &= C^T W L^{-1} \end{aligned} \quad (75)$$

Reemplazando en (73):

$$A = \begin{pmatrix} C^T U L^{-1} \\ C^T V L^{-1} \\ C^T W L^{-1} \end{pmatrix} \quad (76)$$

Si se define a las reacciones de los nodos restringidos en x, y y z como f^x, f^y, f^z , respectivamente. Las ecuaciones de equilibrio de los nodos restringidos, se puede escribir de manera análoga a las de los nodos libres.

$$A^f s = f \quad (77)$$

En donde:

$$A^f = \begin{pmatrix} (C^f)^T U L^{-1} \\ (C^f)^T V L^{-1} \\ (C^f)^T W L^{-1} \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$f = \begin{pmatrix} f^x \\ f^y \\ f^z \end{pmatrix} \quad (79)$$

Ejemplo de aplicación:

Para entender de mejor manera este concepto, se presenta la siguiente estructura formada por ocho barras que se unen en nodos libres, es decir que la estructura no está restringida en ningún nodo:

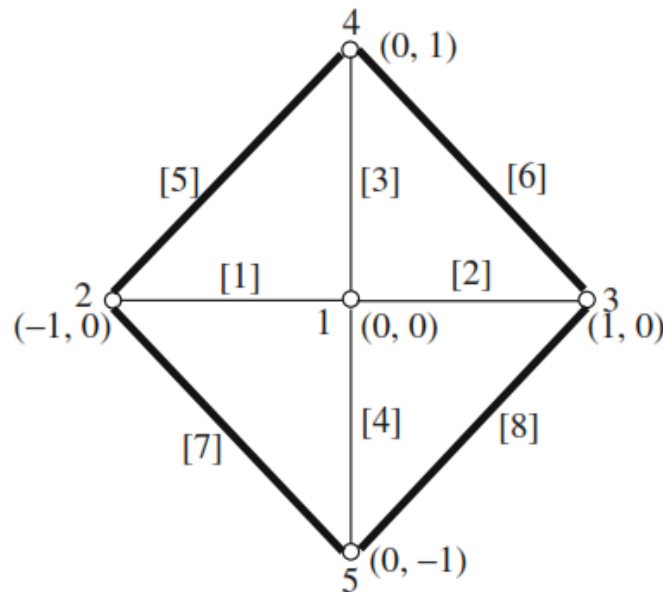


Figura 7.1 Estructura bidimensional que no se encuentra restringida en ningún punto (J. Y. Zhang & Ohsaki, 2015).

Para la cual se presenta la siguiente matriz de conectividad:

$$C = C^s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En la cual las columnas hacen referencias a los nodos y las filas a los elementos. Por ejemplo, la fila 1 indica que el elemento 1, une el nodo 1 con el dos. La fila 8 indica que el elemento 8, une el nodo 3 con el 5.

Los vectores de coordenadas en x y y serán:

$$x = (0, -1, 1, 0, 0)^T$$

$$y = (0, 0, 0, 1, -1)^T$$

Ahora se proceden a calcular los vectores u y v :

$$u = Cx = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_1 - x_4 \\ x_1 - x_5 \\ x_2 - x_4 \\ x_3 - x_4 \\ x_2 - x_5 \\ x_3 - x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = Cy = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 - y_2 \\ y_1 - y_3 \\ y_1 - y_4 \\ y_2 - y_4 \\ y_3 - y_4 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de equilibrio de orden **10x8** será igual a:

$$A = \begin{pmatrix} C^T U L^{-1} \\ C^T V L^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

7.2. ANEXO B: Determinación de la carga de viento con (AASHTO LRFD, 2009b).

La carga de viento que actúa horizontalmente sobre el puente se debe calcular mediante la siguiente ecuación:

$$P_z = 0.613K_zGV^2I_rC_d \text{ (Pa)} \quad (80)$$

$$P_z = 0.00256K_zGV^2I_rC_d \text{ (psf)}$$

De donde:

Tabla 7.1 Denominación y Valor de Variables de Carga de Viento y secciones de (AASHTO LRFD, 2009b) donde se encuentran la manera de determinar dichas variables .

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	SECCIÓN	VALOR OBTENIDO
K_z	Factor de Altura y Exposición.	3.8.4	1.16
G	Factor de Efecto Ráfaga.	3.8.5	1.14
V	Velocidad Básica del Viento.	3.8.2	55.92 (mph) 25.00 (m/s)
I_r	Factor de Importancia del Viento.	3.8.3	1.15
C_d	Coeficiente de Arrastre.	3.8.6	1.20
P_z	Carga de viento,	3.8.1	14.61 (psf) 71.34 (Kg/m ²)

Factor de Altura y Exposición (K_z):

Para encontrar el valor de este factor se asumió que la altura del puente desde el río es de 20 m. Este factor corresponde a la tabla 3-5 de la especificación.

Factor de Efecto Ráfaga (G):

La especificación establece que el valor mínimo para el factor de Efecto Ráfaga es de 1.14.

Velocidad Básica del Viento (V):

En este caso no se puede usar la especificación, porque esta se refiere a los Estados Unidos de América, por lo tanto, se ha tomado como ejemplo la velocidad de la ciudad de Yantzaza-Ecuador que no tiene velocidades extremas de viento, con un valor de 25 m/s = 55.92 mph.



Factor de Importancia del Viento (I_r):

Para calcular el Factor de Importancia del Viento es necesario establecer un periodo de vida de la estructura, en este trabajo se usará 100 años, y como se mencionó anteriormente la velocidad de viento es pequeña así que no se trata de una región de huracanes. Con esta información se puede ir a la tabla 3-2 de la especificación y determinar I_r .

Coeficiente de Arrastre (C_d):

En el presente trabajo se ha usado el Coeficiente de Arrastre de 1.2, debido a que se usan perfiles HSS Circulares. El valor de este coeficiente se determina con el tipo de sección en la tabla 3-6 de la especificación.

7.3. ANEXO C: Programa de MATLAB para la determinación de la distribución relativa de Pres Esfuerzo usando la DSVD.

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%UNIVERSIDAD DE CUENCA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%MÉTODO DSVD PARA LA DETERMINACIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN DE PRETENSADO DE UN%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ENSAMBLAJE RETICULAR TRIDIMENSIONAL%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%TENSEGRIDAD COMO SISTEMA ESTRUCTURAL ALTERNATIVO APLICADO A PUENTES%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%PEATONALES%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%REALIZADO POR: JASWANT ISRAEL COBOS COBOS%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%
clear all
close all
clc
%
%
%LECTURA DE DATOS:
%
CON=xlsread('TABLAS.xls',1); %Matriz de conectividad.
%Los grupos de simetría deben estar ordenados de menor a mayor.
COOR=xlsread(' TABLAS.xlsx',2); %Matriz de coordenadas.
NL=xlsread(' TABLAS.xlsx',3); %Vector de nodos libres.
b=size(CON,1); %Numero de elementos.
n=size(NL,1); %Número de nodos libres.
Cs=zeros(b,n); %Matriz de conectividad.
for i=1:size(Cs,1)
    Cs(i,min(CON(i,2:3)))=1;
    Cs(i,max(CON(i,2:3)))=-1;
end
%
%
%ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ EQUILIBRIO:
%
%Código que calcula la longitud de los elementos:
for i=1:size(CON,1)
    NI=CON(i,2); %Nodo inicial del elemento.
    NF=CON(i,3); %Nodo final del elemento.
    fNI = find( COOR(:,1)==NI); %Posición fila del nodo inicial.
    fNF = find( COOR(:,1)==NF); %Posición fila del nodo final.
    CI=COOR(fNI,2:4); %Coordenadas x y z del nodo inicial.
    CF=COOR(fNF,2:4); %Coordenadas x y z del nodo final.
    %Longitud del elemento:
    L(i,1)=( (CF(1)-CI(1))^2+(CF(2)-CI(2))^2+(CF(3)-CI(3))^2)^(1/2);
end
L=diag(L);
%Matriz de Equilibrio:
A=[ (Cs'*diag(Cs*COOR(:,2))*inv(L)) ', (Cs'*diag(Cs*COOR(:,3))*inv(L)) ', (Cs'*diag(
(Cs*COOR(:,4))*inv(L)) '];
%
%
%DETERMINACIÓN DE MODOS DE PRETENSADO INDEPENDIENTE:
%
r1=rank(A); %Rango de la Matriz A.
s1=b-r1;
[~,~,V]=svd(A); %Descomposición en Valores Singulares de la matriz de
equilibrio.
T=V(:,r1+1:b); %Modos de Pretensado Independiente
%

```

```
%
%DETERMINACIÓN DE MODOS DE PRETENSADO INTEGRAL
%
[a,e]=size(T); %Dimensiones de la matriz T.
n=max(CON(:,4)); %Se establece el número de grupos de simetría.
E=zeros(a,n); %Esta matriz contendrá los vectores -e del método.
i=1; %Inicialización de variable.
j=1; %Inicialización de variable.
%Ensamblaje de los vectores -e del método:
for k=1:n;
    while (CON(j,4)-k)==0;
        E(j,i)=-1;
        j=j+1;
        if j==a+1;
            j=1;
        end
    end
    i=i+1;
end
X=[T E]; %Matriz X del método.
[~,S,V2] = svd(X); %Segunda Descomposición en Valores Singulares.
r2=rank(X); %Rango de la matriz X.
b2=size(X,2); %Número de vectores columna de la matriz X.
s2=s1+n-r2; %Número de modos de pretensado integral.
Tr=V2(:,r2+1:b2);
W1=E*Tr(size(T,2)+1:b2,:); %Modo de pretensado integral
%El siguiente for coloca los coeficientes del modo de pretensado según el
%grupo de simetría:
for i=1:size(W1,1);
    if i==1
        W(i,1)=W1(i);
    else
        if W1(i)==W1(i-1)%<1.01&W1(i)/W1(i-1)>0.99
            W(i,1)=0;
        else
            W(i,1)=W1(i);
        end
    end
end
h=find(W==0); %Cálculo de lugares vacíos en la matriz.
W(h)=[]; %Coeficientes del modo de pretensado según el grupo de simetría.
%El siguiente if calcula la distribución relativa de pretensado con
%respecto al valor mas grande.
if abs(min(W))>max(W)
    W=W/abs(min(W));
else
    W=W/max(W);
end
%
%
%GRAFICO:
%
b=size(CON,1);
%Configuración de los límites de la ventana gráfica:
dx=(max(COOR(:,2))-min(COOR(:,2)))/10;
dy=(max(COOR(:,3))-min(COOR(:,3)))/10;
dz=(max(COOR(:,4))-min(COOR(:,4)))/10;
xmin=min(COOR(:,2))-dx;
xmax=max(COOR(:,2))+dx;
ymin=min(COOR(:,3))-dy;
ymax=max(COOR(:,3))+dy;
zmin=min(COOR(:,4))-dz;
zmax=max(COOR(:,4))+dz;
%Gráfico de la Estructura:
title('MODO DE PRETENSADO','fontsize',20,'linewidth',0.7)
```



```
text((xmax-0.5*dx),(ymax-3*dy),(zmax-  
3*dz),'TRACCIÓN','color','b','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);  
text((xmax-0.5*dx),(ymax-5*dy),(zmax-  
5*dz),'COMPRESIÓN','color','r','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);  
text((xmax-0.5*dx),(ymax-7*dy),(zmax-7*dz),'NO  
ESFORZADO','color','k','backgroundcolor','w','linewidth',0.7);  
for i=1:b;  
    x=[COOR(CON(i,2),2),COOR(CON(i,3),2)];  
    y=[COOR(CON(i,2),3),COOR(CON(i,3),3)];  
    z=[COOR(CON(i,2),4),COOR(CON(i,3),4)];  
    hold on;  
    grid on;  
    axis([xmin xmax ymin ymax zmin zmax]);  
    if W(CON(i,4))<0.00001&&W(CON(i,4))>-0.00001;  
        plot3(x,y,z,'k','linewidth',2);  
    elseif W(CON(i,4))>0;  
        g=round(abs(W(CON(i,4))*10)); %Grosor de línea proporcional  
        if g==0; %al valor de distribución  
            g=0.5;  
        end;  
        plot3(x,y,z,'b','linewidth',g);  
    elseif W(CON(i,4))<0 ;  
        g=round(abs(W(CON(i,4))*10)); %Grosor de línea proporcional  
        if g==0; %al valor de distribución  
            g=0.5;  
        end;  
        plot3(x,y,z,'r','linewidth',g);  
    end  
end  
axis equal;
```